

# Fizikai Szemle

## MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította  
A Matematikai és Physikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

LVII. évfolyam

7. szám

2007. július

## LEJTŐN LEFOLYÓ SZEMCSÉS ANYAG DINAMIKÁJA: INSTABILITÁSOK, LAVINÁK

Börzsönyi Tamás  
MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézete

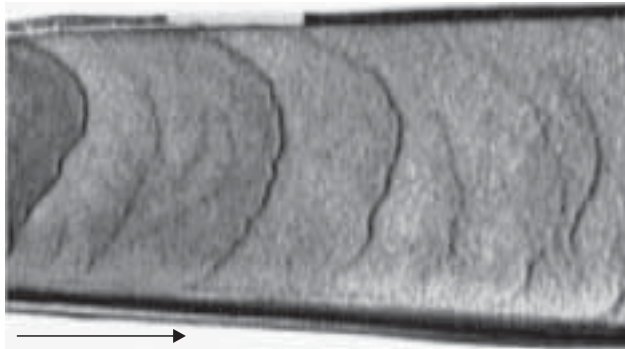
Szemcsés anyagokkal a mindennapi életünkben, az iparban és a természetben is gyakran találkozunk [1–3]. Ennek ellenére viselkedésüket sok esetben mind a mai napig megjósolhatatlannak találjuk. Gondolhatunk a hegyoldalakon megfigyelhető, előre nem jelezhető kőlavinákra, vagy a nagy mechanikai feszültség hatására összedőlő gabonasilókra. Gyakran gondot okoz az ipari folyamatok tervezőinek, hogy a szemcsés anyag „nem normálisan” viselkedik, például különböző méretű szemcsék összekeverésénél az anyag a keverés, vagy rázás hatására inkább szétválik, vagy más esetben csöveket dugít el, ahol pedig a számítások szerint folynia kellene. Így a szemcsés anyagok mechanikai, dinamikai tulajdonságainak vizsgálata ma is aktív kutatási terület, ami sok más területtel is összefügg. Erre egy jó példa a közlekedésdinamika, ahol az autók vagy gyalogosok mozgását leíró modellek gyakran szoros rokonságot mutatnak a szemcsés anyagok áramlási modelljeivel.

A szemcsés anyagok dinamikai viselkedését érdekes dualitás jellemzi. Egyfelől, a dobozból elég gyorsan kiöntött cukor, vagy kávé a folyadékokhoz nagyon hasonlóan folyik, másrészt, a folyás megindulásának vagy – lassú öntés esetén megfigyelhető – szakaszosságának legegyszerűbb leírásához abból érdemes kiindulni, hogy az anyag nagyon sok, piciny szilárd egységből áll. A szemcsés anyagokkal foglalkozó kutatókat, mérnököket régóta foglalkoztatja, hogy milyen módon lehetne a szemcsés anyagok dinamikai jelenségeit a folyadékdinamikai kontinuumegyenletekhez hasonló keretek között tárgyalni. Az egyik nehézség, hogy a szemcsés anyag – ellentétben a normál folyadékokkal – összenyomható, és sűrűsége nagyon tág határok között változhat. Egy dobozban lévő anyagot intenzíven rázva könnyen elérhető a nagyon ritka gázszerű

fázis, a doboz mozgását fokozatosan lassítva pedig a mozgásban lévő anyag sűrűsége folyamatosan növekszik, megközelítve a nyugalmi sűrűséget. Egy másik nehézség, hogy, ellentétben az átlátszó folyadékokkal, amelyekben az áramlási teret az anyag belsejében is viszonylag könnyen feltérképezhetjük a folyadékba helyezett „tracer” részecskék mozgását követve, a szemcsés anyagok áramlását legtöbbször csak a felületen tudjuk nyomon követni. Így jóval kevesebb információból kell rekonstruálnunk, hogy milyenek is lehetnek a különböző geometriákban megfigyelhető áramlási terek, illetve az azokat meghatározó törvényszerűségek. A manapság már viszonylag elérhető árú, gyors videokamerák (néhány ezer kép/másodperc) elterjedésével egyre intenzívebb adatgyűjtés folyik, hogy a szóba jöhető modelleket teszteljük. A különböző nyírási geometriák mellett az egyik gyakran vizsgált eset – egyszerűsége miatt is – az érdes felületű lejtőn lefolyó, nem túl vastag szemcsés réteg.

A folyadékok mozgásának leírásánál a nyírófeszültség és a nyírás következtében létrejövő sebességgradiens között lineáris összefüggést találunk, amit egy lényeges anyagi paraméter, a viszkozitás jellemez. Egyszerű (newtoni) folyadékok esetében ez a viszkozitás konstans, bonyolultabb esetekben (pl. polimeroldatoknál) függ a nyírás erősségétől. A szemcsés anyagok esete még ennél is bonyolultabb, mivel itt hagyományos értelemben vett viszkozitásról sem beszélhetünk, hiszen a nyírófeszültség általában nem a sebességgradiens első hatványával arányos. Ha a lejtőn lefolyó anyag esetét nézzük, akkor newtoni folyadékoknál a felszíni sebesség a rétegvastagság négyzetével arányosan nő, ami a konstans viszkozitás következménye. Egy angol mérnök – *R.A. Bagnold* – a második világháború utáni években intenzíven érdeklődött, hogy hogyan is lehet ez a szemcsés anyagok esetében. Azzal a modellel állt elő, hogy itt a nyírófeszültségnek a sebességgradiens második hatványával

A vizsgálatokat az OTKA-F-060157 kutatási pályázat támogatásával és az MTA Bolyai János Kutatási ösztöndíj segítségével végeztem.

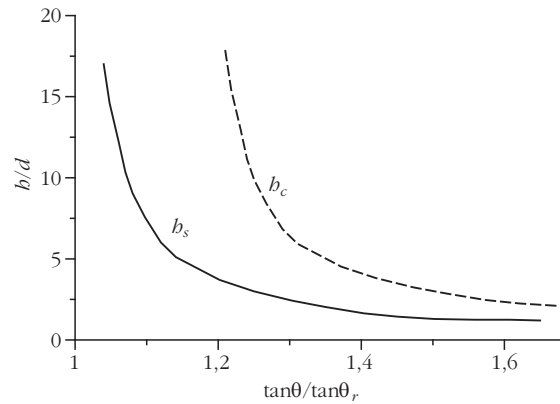


1. ábra. Lejtőn lefolyó szemcsés anyag felületén megfigyelhető hullámok felülről nézve. A folyás irányát a nyíl jelöli.

kell arányosnak lennie. Érvelése szerint a lejtővel párhuzamos, egymás fölötti rétegekben lévő, egymással ütköző részecskék közötti lendületátadás a sebességgradiens mértékével arányos. Másrészt, ezen ütközések frekvenciája szintén lineárisan függ a sebességgradienstől. Az így megindokolt négyzetes összefüggés ahhoz vezet, hogy a felszíni sebesség nem a vastagság négyzetével, hanem annak csak  $3/2$ -ik hatványával növekszik. Ez az, amit egyszerű kísérletekkel igazolni lehet, és az elmúlt néhány évben többen is kimutatták, hogy valóban így van, de csak addig, amíg az anyag viszonylag lassan áramlik és sűrűsége nagy, azaz alig tér el a nyugalmi sűrűségtől. A nagyon lassú határesetben a Bagnold-modell ismét érvényét veszti, ezt az úgynevezett kvázisztatikus nyírési tartományt más geometriában intenzíven vizsgálják [4].

A lejtőn lefolyó réteg vizsgálata azonban nem csak a fenti alaptulajdonságok szempontjából érdekes, hanem azért is, mert a homogén állapot gyakran instabillá válik és különféle mintázatok alakulhatnak ki. Ezek lehetnek hasonlóak azokhoz, amelyeket a hagyományos folyadékoknál is láthatunk, de vannak olyanok is, amelyeket folyadékokban eddig nem figyeltek meg.

A lejtő meredekségét növelve, a folyás megindulása után a homogén állapot első instabilitása hullámok kialakulásához vezet (lásd 1. ábra). Az már régóta ismert tény, hogy egy függőleges falon vagy lejtőn lefolyó vékony folyadékréteg instabillá válik és hullámok alakulnak ki. A jelenséget Kapitza-instabilitásként szokták emlegetni. Az utóbbi években ezt az instabilitást többen is vizsgálták szemcsés anyagokra, és azt tapasztalták, hogy ugyan az instabilitás a folyadékokban megfigyelthez hasonlóan inerciális eredetű, a hullámok tulajdonságai mégis lényegesen eltérőek [5]. Ezeknél az anyagoknál ugyanis – a newtoni folyadékokkal ellentétben – az instabilitási küszöb könnyen eshet a folyási határ alá, vagyis az instabilitás rögtön az áramlás megindulásánál jelen lesz. Ez annak a következménye, hogy a lejtőre helyezett szemcsés anyag csak egy kritikus  $b_c$  vastagság fölött kezd el folyni, illetve egy ennél kicsit kisebb  $b_s$  vastagságnál a folyás megáll. Így a szemcsés anyagot vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a hullámok rögtön a folyás megindulása után kialakulnak. A vastagabb részeknél az áramlás felgyorsul, míg máshol elvékonyodik, lelassul és meg is áll. Ily módon a lejtő aljára az anyag már diszkrét csomagokban (lavinákban) érkezik.

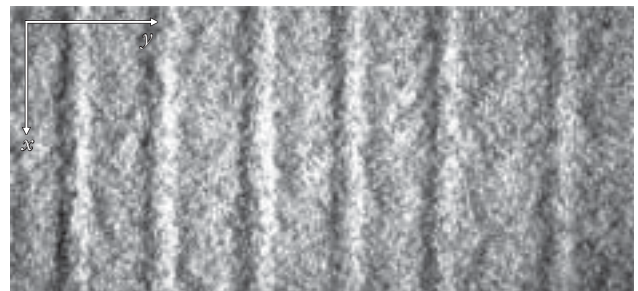
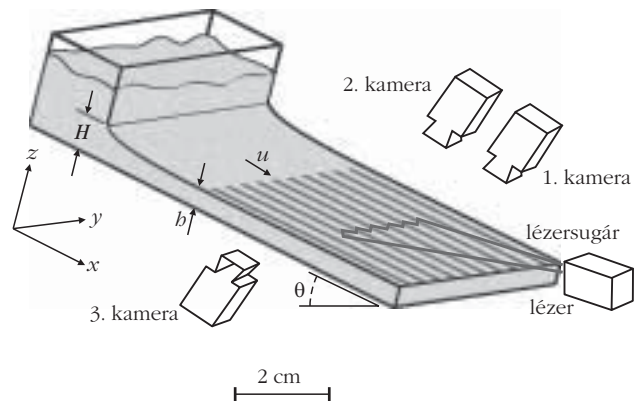


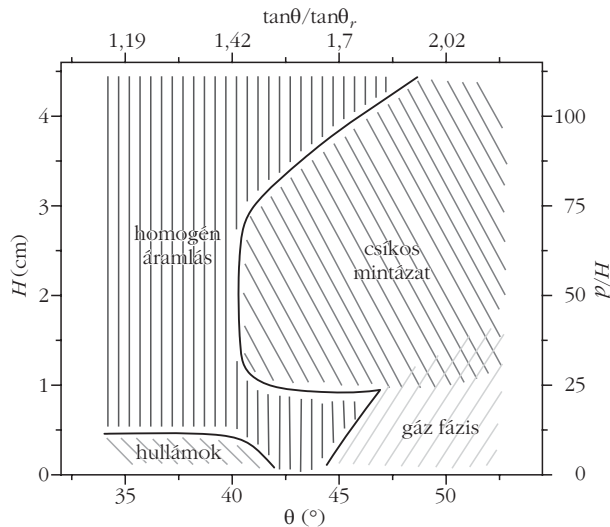
2. ábra. Érdes felületű lejtőn az áramlás csak egy kritikus rétegvastagság ( $b_c$ ) fölött indul meg, egy ennél kisebb  $b_s$  vastagság alatt pedig megáll. A két görbe közötti tartományban az anyag metastabil állapotban van. A fenti görbék arra az esetre vonatkoznak, amikor a lejtő érdessége a részecskeméretéhez ( $d$ ) hasonló.

A két mennyiség –  $b_s$  és  $b_c$  – fontos paraméter és a 2. ábrán látható módon függ a lejtő dőlésszögétől. A két görbe végtelenbe fut a lejtő meredekségének egy meghatározott értékénél. Azt a szöget, ami egy főnről növesztett homokdomb oldalán alakul ki azután, hogy abbamarad a bejövő anyagáram és a még mozgásban lévő szemcsék mind lefolynak, *részűszögnek* ( $\theta_r$ ) nevezzük, és, mint az várható, ez a  $b_s$  görbe aszimptotája (2. ábra). Ez a szög körülbelül  $31^\circ$  homokszemcsék esetén és  $21^\circ$  üveggolyók esetén.

A lejtő meredekségét növelve, az áramlás gyorsulásával egy másik, talán még érdekesebb instabilitás figyelhető meg, amelynek során az anyag a 3. ábrán látható módon csíkokba rendeződik. Ez a jelenség hagyományos folyadékokban hasonló körülmények között nem figyelhető meg. Érdekes, hogy ez egy csak nem régen

3. ábra. Ha a lejtő meredeksége meghalad egy kritikus értéket, a lefolyó anyag spontán csíkokba rendeződhet.

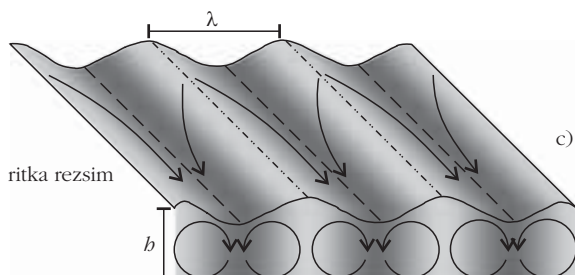
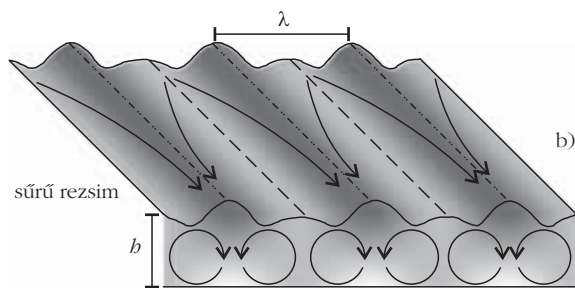
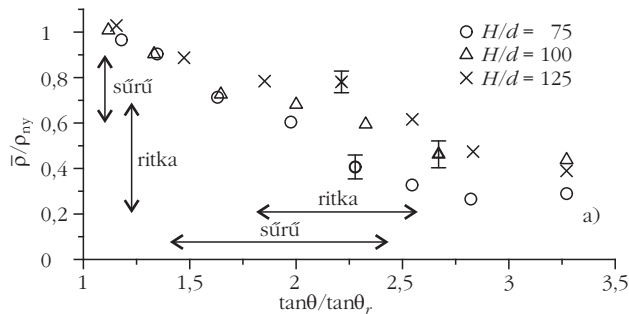




4. ábra. A különböző áramlási rezsimiek fázisdiagramja a bejövő anyagmennyiséget szabályozó nyílás nagyságának és a lejtő meredekségének függvényében.

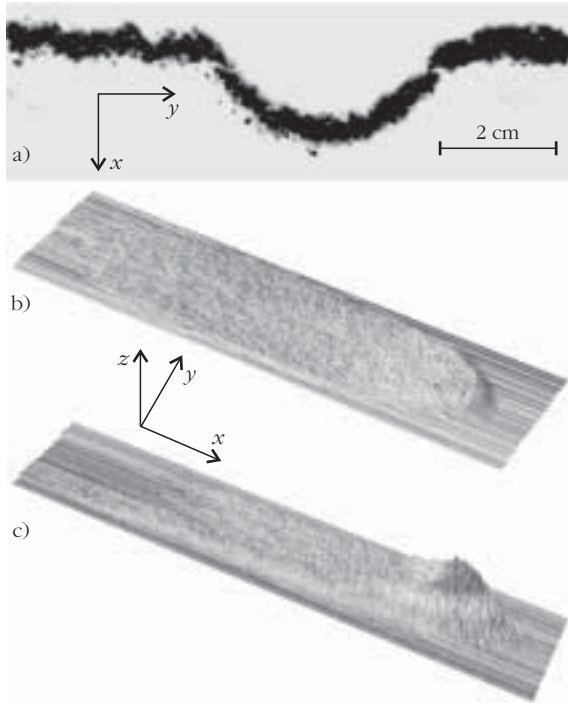
felfedezett jelenség annak ellenére, hogy viszonylag tág tartományban megfigyelhető. Ha a fázisdiagramot szemléljük (4. ábra), amelyen a bejövő anyagmennyiséget szabályozó nyílás  $H$  nagysága és a lejtő meredeksége

5. ábra. (a) A nyugalmi sűrűséggel ( $\rho_{ny}$ ) normált átlagos anyagűrűség a meredekség függvényében három különböző  $H/d$  értékre. Az áramlási tér sematikus ábrája a sűrű (b) és ritka (c) rezsimekben. A sűrűség térbeli változását a szürkesség mértéke jelöli.



függvényében ábrázoltuk a különböző áramlási rezsimekhez tartozó tartományokat, akkor láthatjuk, hogy egy jó nagy részt a csíkokból álló mintázat foglal el, míg például az előzőekben ismertetett hullámok csak a fázisdiagram kis szegletéhez tartozó paramétereknél (vékony, lassú rétegnél) figyelhetők meg. Látható továbbá az is, hogy csíkok csak egy kritikus lejtőmeredekség fölött figyelhetők meg. A küszöbmeredekség sok általunk vizsgált, különböző rézszögű formáló anyagra univerzálisan a  $\tan\theta/\tan\theta_c \approx 1,4$  értéknek felel meg.

Vizsgáljuk meg most a csíkokból álló mintázat szerkezetét és kialakulásának körülményeit. A 3. ábrán látható lézernyaláb felületről visszavert fényét az 1. kamera segítségével detektálva meghatározhatjuk, hogy a mintázathoz milyen magasságmoduláció tartozik. A másik két kamera segítségével a sebességet határozhatjuk meg az áramló réteg felszínén, illetve a legalsó rétegnél közvetlenül a lejtő fölött (egy erre a célra készített ablakon keresztül). Az első dolog, amit elemezni érdemes az, hogy a mintázat a lejtő meredekségét változtatva széles tartományban megfigyelhető, viszont tulajdonságai a lejtő meredekségének növelésével drasztikusan változnak. Ennek feltérképezésére készítettünk egy olyan rendszert, amely az összes kiegészítő berendezéssel együtt (kamerák, lézer stb.) könnyen billenthető. Ennek segítségével nemcsak a különböző rezsimeket határoztuk meg, hanem módunk nyílt azt is megmérni, hogy hogyan változik az áramló anyag átlagos sűrűsége a lejtő meredekségének növelésével [6]. Ezt úgy tettük, hogy a fent említett módszerrel detektáltuk az áramlási vastagságot, miközben a lejtőt hirtelen visszabillentettük, és az áramlást befagyasztottuk. A mérést kellő körültekintéssel végezve könnyen meghatározhatjuk az áramlási és a nyugalmi sűrűség hányadosát. Az 5. ábrán látható, hogy ez a hányados erőteljesen csökken a lejtő meredekségének növelésével. Azt is láthatjuk, hogy két különböző szerkezetű mintázatot találtunk, amit sűrű és ritka rezsimként jelöltünk, mivel az egyikhez tartozó átlagos sűrűség a  $0,6\rho_{ny}-0,9\rho_{ny}$  a másikhoz tartozó pedig a  $0,2\rho_{ny}-0,7\rho_{ny}$  tartományban van. A két rezsim közös vonása, hogy az áramlási vastagság periodikusan változik az  $y$  irányban, viszont lényeges különbség, hogy míg a ritka rezsimben a vastagságminimumokhoz sebességmaximum tartozik, addig a sűrű rezsimben épp fordítva, azaz az áramlási sebesség a vastagságmaximumnál a legnagyobb. A felszínen mért áramlási térkép arra enged következtetni, hogy az áramlási tér vortex jellegű, ahogy azt az 5.b-c ábrákon vázoltuk. Ez lehet annak a következménye, hogy az instabilitás bizonyos tekintetben hasonlít a folyadékok esetében jól ismert Rayleigh-Benard-instabilitáshoz, amikor is egy alulról fűtött folyadékrétegben hengeres áramlás alakul ki, mivel a melegítés hatására a folyadék alsó része kicsit kitágul, és a fölötte lévő hidegebb (sűrűbb) folyadékréteggel instabil konfigurációt alkot. Ilyen úgynevezett sűrűséginverzió jöhet létre a szemcsékből álló rétegben is, ahol az érdes felületű lejtővel való ütközések hatására a részecskék közötti átlagos távolság kicsit megnő a lejtőhöz közelebbi részen, vagyis egy viszonylag sűrűbb réteg csúszik egy



6. ábra. (a) A 3. ábrán látható lézernyaláb 1. kamerával rögzített képe, miközben egy lavina épp ott halad el. A lézernyaláb képének időbeli változását rögzítve meghatározhatjuk a lavinák magasságprofilját. A piciny golyókból álló szemcsés anyagban megfigyelhető lavina (b) elnyújtottabb, laposabb alakú, és benne a részecskék mozgása kevésbé dinamikus, mint a szabálytalanabb alakú homokszemcsékből álló anyagban megfigyelt lavinánál (c).

ritkább réteg tetején [7]. Az, hogy az instabilitás emiatt jön-e létre, vagy pedig a hengeres konvekció már egy másodlagos következmény, még nem tisztázott. Úgy tűnik ugyanis, hogy a mintázat kialakulása gyorsuló folyásnál történik, és, amikor a folyás a lejtőn lefelé haladva eléri a végsebességét (már nem gyorsul tovább), a mintázat elhalni látszik. Így a folyás gyorsuló mivolta is fontos tényezőnek tűnik a mintázat kialakulása szempontjából.

Mint már korábban említettük, kevés bejövő anyagmennyiség esetén az áramlás szakaszossá válik. Ennek egy extrém határeset, amikor olyan kis ütemben szórjuk a lejtő tetejére a szemcséket, hogy csak nagyritkán indul meg egy-egy lavina. Ezek a lavinák aztán formájukat és sebességüket tartva stacionárius módon haladnak lefelé a lejtőn lévő sztatikus réteg felszínén. A lavinák tulajdonságait vizsgálva azt tapasztaltuk, hogy nagy mértékben függenek a szemcsés anyag milyenségétől [8]. Elsőként vegyük szemügyre a lavinák alakját. A 6.a ábrán láthatjuk a 3. ábrán látható lézernyaláb 1. kamerával rögzített képét. Ahogy a lavina elhalad, a lézernyalábról felvett kép az időben változik, amiből rekonstruálhatjuk a lavina magasságprofilját (6.b–c ábrák). Piciny golyókat használva a lavinák alakja elnyújtottabb, és magasságuk csak ritkán haladja meg a  $2h_s$  értéket (6.b ábra). Ezzel szemben a kicsit szabálytalanabb alakú, de még mindig nem túl sarkos homokszemcsékből álló anyag esetében a lavinának egy magas, dinamikus frontja van, amelynek magassága  $3h_s$ – $4h_s$  (6.c ábra).

A nagy sebességű kamerával felvett felvételeken [9] látható, hogy az említett két esetben megfigyelhető lavináknak nem csak az alakja gyökeresen különböző. A szabálytalanabb homokszemcsék esetén a lavinafrontból kirepülnek a részecskék, azaz a tipikus részecskesebesség (kb. 30%-kal) nagyobb, mint a lavina haladási sebessége. Golyókból álló rendszer esetében viszont a lavina haladási sebessége nagyobb – mintegy másfélszerese – a legnagyobb részecskesebességnek. Itt ugyanis a lavina haladása úgy történik, hogy a lejtőn nyugalomban lévő ( $h_s$  vastagságú) rétegben lévő részecskék mozgásba jönnek a kicsit fentebb lévő, már mozgó részecskékkel meglévő kontaktusaik folytán.

A fentiekben ismertetett és az azokhoz hasonló egyszerű kísérletekkel fontos információkat tudhatunk meg a szemcsés anyagok alaptulajdonságairól, segítségükkel megérthetünk a természetben megfigyelt vagy ipari folyamatokban lejátszódó jelenségeket. Egy igen erős motiváció azonban a numerikus modellek érvényességi körének tesztelése is. A számítógépes modellezésben az eszközzel leírt folyamatok fejlődésével a valóságot egyre pontosabban leíró rendszereket tudunk vizsgálni, így módon költséges kísérletek elvégzése helyett szimulációk segítségével jósolhatunk meg fontos jelenségeket. A modellekben számos egyszerűsítéssel szokás élni, amelyek jelentősen javítják a numerikus számítások hatékonyságát, viszont bizonyos mértékig korlátozzák is azok érvényességi körét. Egyik ilyen egyszerűsítés, hogy az esetek túlnyomó többségében gömb alakú szemcséket használnak. Sok példát találhatunk arra, hogy kísérletet piciny gömbökkel és szabálytalan alakú homokszemcsékkel elvégezve hasonló viselkedést tapasztalunk, ilyen volt például a csíkokból álló mintázat, de könnyen találhatunk lényegesen eltérő viselkedést is. Ilyen például a hullámok esete, ahol a két esetben kvalitatívan hasonló, de kvantitatívan nagyon különböző dinamikát találunk, vagy a lavinák, ahol a két rendszer viselkedése nemcsak kvantitatívan, hanem már kvalitatívan is eltérő.

## Irodalom

1. Vankó P., Izgalmas mérések a mérnök-fizikus hallgatói laboratóriumban. *Fizikai Szemle* 56 (2006) 307
2. Jánosi I., A homok titkai. *Természet Világa* 129 (1998) 19
3. Jánosi I., Zajongó homokdombok és egyéb furcsaságok: új fejlemények a granuláris anyagok fizikájában. *Fizikai Szemle* 45 (1995) 78
4. Unger T., Török J., Kertész J., Wolf D.E., Shear band formation in granular media as a variational problem. *Physical Review Letters* 92 (2004) 214301
5. Forterre Y., Pouliquen O., Long-surface-wave instability in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics* 486 (2003) 21
6. Börzsönyi T., Ecke R.E., Rapid granular flows on a rough incline: phase diagram, gas transition, and effects of air drag. *Physical Review E* 74 (2006) 061301
7. Forterre Y., Pouliquen O., Longitudinal vortices in granular flows. *Physical Review Letters* 86 (2001) 5886
8. Börzsönyi T., Ecke R.E., Two scenarios for avalanche dynamics in inclined granular layers. *Physical Review Letters* 94 (2005) 208001
9. Nagy sebességű kamerával készült videofelvételek és további információk elérhetők a <http://www.szfi.hu/~btamas/gran/gran.html> internetes oldalon.