

fizikai szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Physikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította
A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította

XL. évfolyam

11. szám

1990. november

**A KORDYLEWSKI-FÉLE PORHOLDAK
KIALAKULÁSÁNAK SZÁMÍTÓGÉPES
MODELLEZÉSE**

Horváth Ákos
Szilády Áron Gimnázium, Kiskunhalas
Horváth Gábor
MTA KFKI, Budapest

1. Bevezetés

A személyi számítógépeknek a közép- és felsőoktatásbeli napjainkban tapasztalható széleskörű elterjedése számos olyan érdekes fizikai és csillagászati jelenséget is testközelbe hozott, amelyek korábban a nagyfokú numerikus számításgény miatt egyáltalán nem voltak vizsgálhatók a diákok által. Egyes problémák már ZX-Spectrum vagy Commodore-típusú mikrogepek felhasználásával is látványosan megoldhatók [1-4], a bonyolultabb (pl. többtest-problémák) esetek azonban igazán hatékonyan csak nagyobb teljesítményű számítógépekkel (pl. IBM PC XT/AT) kezelhetők.

A csillagászat a középiskolás tananyagból, de a Természettudományi Karok felsőoktatási tantervéből is, korunk tudományában és világnézetében betöltött fontos szerepéhez mérten érdemein alul, sajnálatosan kis hányadot hasít csak ki. Ezért különösen fontos, hogy olyan számítógépes oktatóprogramok álljanak rendelkezésére a csillagászati (alap)ismereteket is tanító oktatóknak, amelyekkel látványosan, célratorőn demonstrálhatók a legfontosabb csillagászati jelenségek.

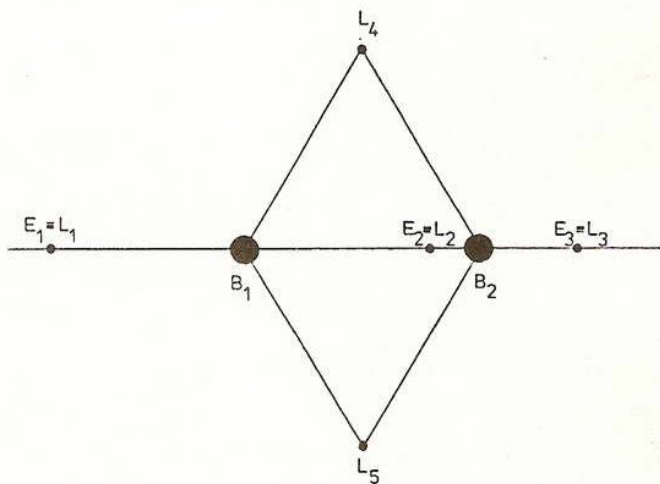
A csillagászati tudományágak közül talán a dinamikus csillagászat jelenségei modellezhetők legkönnyebben és leglátványosabban nagyobb teljesítményű számítógépekkel. Ide sorolandók például a különféle bolygóreakciók (égi mechanika), a meserséges égitestek mozgása (asztrodinamika) [1], a galaxis kölcsönhatások (sztellárdinamika) [2], valamint a korlátozott háromtest-probléma azon esete is, amikor például két egymás körül keringő égitest gravitációs terében bizonyos kitüntetett pontok körül a csillag- vagy bolygóközi anyag (por) lokális sűrűsödése alakul ki, s ez különös porholdak keletkezéséhez vezet.

Cikkünkben először röviden ezen porholdak felfedezésének történetével és égi mechanikájukkal foglalkozunk, majd egy viszonylag könnyen megvalósítható számítógépes receptet (algoritmust) adunk kialakulásuk szimulációjára.

2. A háromtest-probléma (HP)

Az égi mechanika (a dinamikus csillagászat) azon ága, amely a Naprendszer természetes égitestjeinek mozgásával foglalkozik) leghíresebb problémája a háromtest-probléma (HP), mikor is három tömegpont mozgása vizsgálendő egymás Newton-féle gravitációs terében minden más külső hatás elhanyagolásával. A HP-nak 2-dimenzióban öt egzakt partikuláris megoldása létezik, ezek az ún. Euler-Lagrange-féle

megoldások [5]. 1767-ben Euler mutatott rá, hogy a HP-nak három megoldása van abban a speciális esetben, mikor a mozgás során a három tömegpont mindig egy egyenesbe esik. 1772-ben Lagrange öt síkbeli megoldást talált a HP azon speciális, de az Euler-félenél általánosabb esetére, mikor a három tömegpontból álló rendszer síkbeli konfigurációja önálló a mozgás során, azaz a testek közti távolságok aránya változatlan. Az általánosabb Lagrange-féle megoldásokat szematikusan az 1. ábra szemlélteti; a sík azon pontjait, amelyek kielégítik a Lagrange-féle megoldást, L_1 , L_2 , L_3 , L_4 és L_5 -el szokásos jelölni. A három speciális E_1 , E_2 és E_3 Euler-féle megoldás rendre megegyezik az L_1 , L_2 és L_3 Lagrange-félével, az L_4 és L_5 pontok pedig a B_1 és B_2 tömegpontokra fektetett egyenlő oldalú háromszögek csúcsában vannak.



1. ábra A háromtest-probléma Euler-féle (E_1 , E_2 , E_3) és Lagrange-féle (L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5) megoldásai. Ha a B_1 és B_2 égitestek gravitációs terében lévő Lagrange-féle pontok valamelyikébe helyezzük a harmadik égitestet, akkor mindhárom tömeg a rendszer tömegközéppontjához és egymáshoz viszonyítva is hasonló kúpszelet-pályákon mozog úgy, hogy közben vagy egy egyenes mentén, vagy egy egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban helyezkednek el.

A korlátozott háromtest-probléma (KHP)

A Naprendszerben túlnyomórészt a HP azon speciális eseteivel találkozhatunk, amelyekben az egyik égitest tömege elhanyagolhatóan kicsi a másik kettőéhez képest, és mindhárom tömeg közel egyazon síkban mozog. Ekkor korlátozott háromtest-problémáról (KHP) beszélünk.

A KHP-nak a következő eseteit szokás megkülönböztetni: Cirkuláris illetve elliptikus KHP-ről (CKHP ill. EKHP) van szó, ha a B_1 és B_2 nagytömegű égitest körmozgást végez közös súlypontjuk körül, illetve ellipszis pályán mozog, s az elhanyagolhatóan

kis tömegű B_3 test ezek keringési síkjában mozog. A perturbált KHP (PKHP) esetén B_1 és B_2 közül az egyik tömege sokkal nagyobb a másikénál, így B_3 mozgását elsősorban a nagyobb tömeg határozza meg, a kisebb pedig azt perturbálja. Végül statikus KHP-val (SKHP) vagy más néven kétcentrum-problémával van dolgunk, ha B_1 és B_2 rögzítettek a térben, s B_3 ezek statikus gravitációs terében mozog.

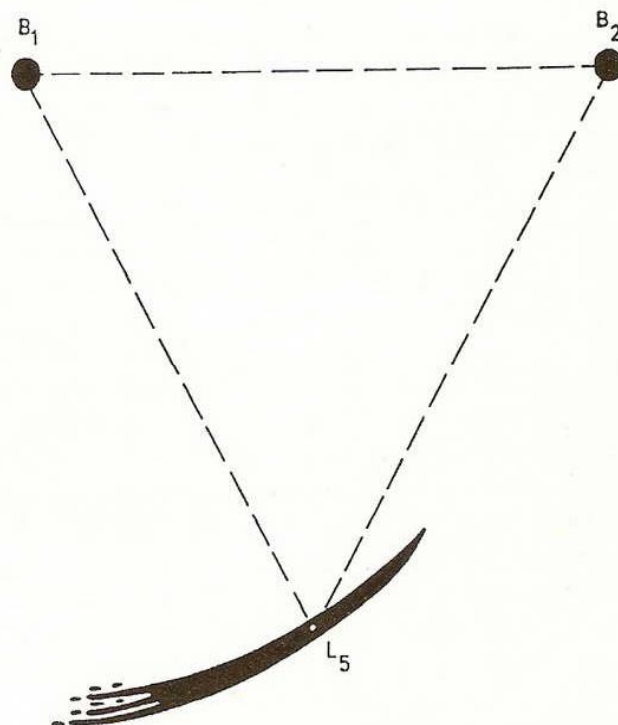
A CKHP-nak igen fontos speciális esete az, amikor B_3 a B_1 és B_2 -vel azonos (és állandó) szögsebességgel körpályán kering a közös súlypont körül, azaz a B_1 , B_2 -vel együttforgó koordináta-rendszerben nyugalomban van. Ekkor a CKHP egyensúlyi megoldásáról beszélünk. Megmutatható [5], hogy a CKHP-nak öt egyensúlyi megoldása létezik, amelyek a HP Lagrange-féle megoldásainak felelnek meg, ezért ezeket is L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 -el jelölik, s Lagrange-pontoknak nevezik.

Elvégezve a Lagrange-pontok stabilitásvizsgálatát kiderül [5], hogy az L_1 , L_2 és L_3 pontok lineárisan és nemlineárisan is instabilak. Ez azt jelenti, hogy a B_3 tömegpontot tetszőleges mértékben kitérítve az L_1 , L_2 , L_3 egyensúlyi helyzetből (ha B_3 helyvektorát sorbafejtjük a kitérítésvektor szerint, s a sorban megállunk az elsőrendű tagnál, azaz csak kis kitérítéseket vizsgálunk, lineáris esetről van szó; ha nagyobb a kitérés, akkor a sorban magasabb rendű tagokat is figyelembe kell vennünk, s ekkor beszélünk nemlinearitásról), általában nem tér oda vissza, hanem az idővel exponenciálisan eltávolodik. Hangsúlyozzuk, hogy általában, mert a kezdőfeltételek megfelelő megválasztásával megvalósíthatók az L_1 , L_2 , L_3 pontok körüli nagyon kis amplitúdójú pályacsaládok is [5].

Ugyancsak megmutatható [5], hogy az L_4 és L_5 pontok lineárisan stabilak, ha a $0 < \mu < \mu_0 = 0,03852$ feltétel teljesül, ahol $0 < \mu \equiv m_2/(m_1 + m_2) \leq 0,5$; m_2 a kisebbik B_2 égitest tömege. Ez azt jelenti, hogy az L_4 vagy L_5 pontból kissé kitérített B_3 tömegpont azok körül olyan, kis amplitúdójú rezgéseket végez, ami két különböző frekvenciájú harmonikus rezgésből tevődik össze, s ezek frekvenciája csak μ -tól függ. Ezt a mozgást másnéven librációnak nevezik a csillagászok, az L_4 és L_5 pontokat pedig Lagrange-féle librációs pontoknak.

Számítógépes modellezéssel már részletesen megvizsgálták ezen librációs pontok közvetlen közelét. A CKHP és az EKHP esetén feltérképezték azt az L_4 , L_5 körüli tartományt, ahová a B_1 , B_2 -höz rögzített (együttforgó) rendszerben zérus kezdősebességű B_3 tömegpontot helyezve, az az L_4 , L_5 pontok körül librációt végez. Mindkét esetben a 2. ábra szerinti elnyúlt, kúrt alakú librációs tartomány adódott [6,7]. Látható, hogy a librációs tartomány kiszélesedő vége meglehetősen összetett szerkezetű, sajátos ujjakra, félszigetekre és szigetekre tagolódott. Ez a komplexitás káoszhoz vezethet abban az értelemben, hogy ha közel megegyező kezdőhelyekről indítunk több B_3 tömegpontot úgy, hogy egyesek a librációs

tartomány félszigeteiről/szigeteiről induljanak, mások pedig közülük, akkor a közel azonos kezdő- és peremfeltételek ellenére is egészen eltérő pályákat futnak be, s az előzőek librálnak, az utóbbiak viszont az időben exponenciálisan eltávolodnak L_4 , L_5 -től. A HP-ról, a KHP-ról és a Lagrange-pontokról, valamint a velük kapcsolatos égi mechanikai elméletről továbbiakat [5]-ben találhatunk.



2. ábra A stabil ($\mu < \mu_0$) L_5 Lagrange-féle librációs pont körüli elnyúlt, kúrt alakú tartomány a CKHP és az EKHP esetén, sematikusan ([6,7] alapján), ahonnan zérus kezdősebességgel indítva B_3 -t, az librációs mozgást végez L_5 körül. Az ábra méretarányos.

4. Lagrange-féle librációs mozgások a Naprendszerben

A stabil ($\mu < \mu_0$) L_4 és L_5 pontok körüli Lagrange-féle librációs mozgásokra számos példa ismert a Naprendszerben [5].

4.1. A trójai kisbolygók

Az első csillagászati példa a Lagrange-librációra az 1907-ben felfedezett Achilles kisbolygó volt, amely a Nap-Jupiter rendszer stabil ($\mu_{\text{Nap-Jupiter}} = 0,00095 < \mu_0$) L_4 pontja körül végez librációt a Jupiterről nézve. Később több hasonló kisbolygót fedeztek még föl, s ezek alkotják a Nap-Jupiter rendszer librációs pontjai körüli Trójai kisbolygók két családját. A többi nagybolygónál hasonló libráló kisbolygó(ka)t nem sikerült még felfedezniük a csillagászoknak.

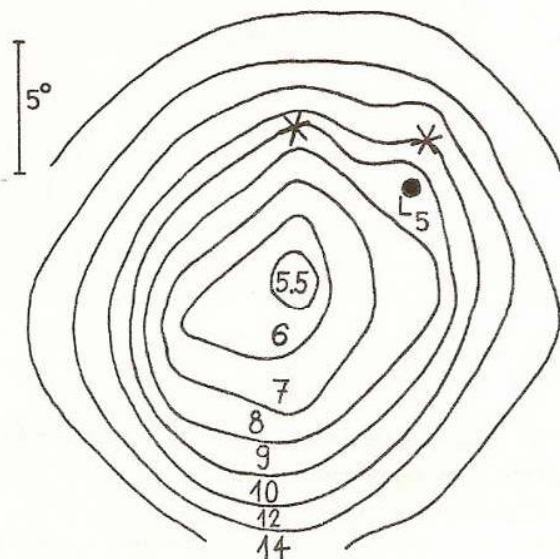
4.2 A Szaturnusz libráló holdjai

A Szaturnusz holdjai közül a 12. a Szaturnusz-Dione rendszer stabil L_4 pontja körül végez librációt, a 16. és 17. hold pedig a Szaturnusz-Tethys rend-

szer stabil L_4 és L_5 pontja körül. Mindhárom esetben PKHP-ról van szó, mert a Szaturnusz Dione és Tethys nevű belső holdjainak tömege jóval kisebb a nagybolygóéhoz képest, továbbá az említett holdak tömege sokkal kisebb a Dionehoz és a Tethyséhez viszonyítva.

4.3. A Kordylewski-féle porholdak

A csillagászok már korábban feltételezték, hogy a stabil Lagrange-féle librációs pontok körül, mint-hogy azok effektív, lokális vonzócentrumokként hatnak, a bolygóközi pornak helyi sűrűsödést kell mutatnia. Ha ez a sűrűsödés megfelelően nagy, akkor fotometriai úton ki is lehet mutatni a napfény szóródása alapján. Első ízben Kordylewski lengyel csillagásznak sikerült bizonyítania 1961-ben a Föld-Hold rendszer stabil ($\mu_{\text{Föld-Hold}} = 0,01213 < \mu_0$) L_4 , L_5 pontjai körül ilyen helyi sűrűsödést; azóta ezeket a csillagászati objektumokat Kordylewski-féle porholdaknak nevezik [8] (1963-64-ben Kordylewski több hónapot töltött Magyarországon, a piszkéstetői obszervatóriumban elsősorban azzal a céllal, hogy porholdjait az ottani, viszonylag sötét égbolton alkalmas időpontban vizuálisan megfigyelje). A 3. ábrán Kordylewski első olyan fotometriai mérési eredménye látható, amely bizonyítja a porholdak helyén a környezetnél nagyobb fényintenzitást (lásd a két kidudorodást az állandó intenzitáshoz tartozó görbék seregén), amit később mások is megerősítettek [9].



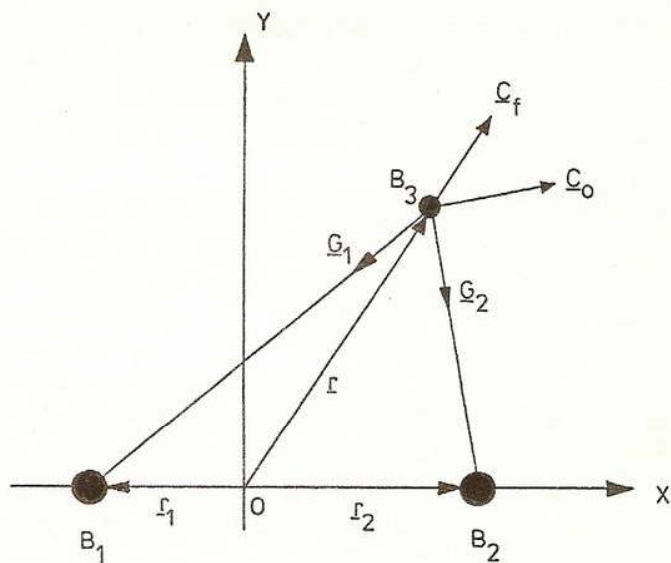
* PORHOLD

3. ábra Az állandó fényintenzitáshoz tartozó görbék serege ([8] alapján) a Föld-Hold rendszerben. Az egyes görbékhez tartozó számok a fényintenzitást mutatják magnitúdóban. Az L_5 librációs pont az ún. ellenfény közelében van, s ez az ellenfény okozza a központi kifényesedést. Jól látható az L_5 stabil librációs pont körüli két kidudorodás a görbeseregben, ami a környezetnél nagyobb fényintenzitás miatt a bolygóközi por helyi sűrűsödésére utal. Elsőnek Kordylewski azonosította ezt a két sűrűsödési gócot a Föld porholdjaiként.

5. A Kordylewski-féle porholdak kialakulásának számítógépes szimulációja

Miután vázlatosan áttekintettük a HP-val, a KHP-val és a Lagrange-pontokkal kapcsolatos főbb elméleti eredményeket valamint azok Naprendszerbeli megnyilvánulását, feladatunk tűzzük ki olyan számítógépes program elkészítését, amellyel hűen és viszonylag könnyen modellezhető a Kordylewski-féle porholdak kialakulása. Dolgozatunkban nem közölhetjük a programlistát, csak a recept (algoritmus) megadására vállalkozhatunk, aminek alapján bárki a rendelkezésére álló számítógépen és az általa ismert számítógépnnyelven könnyen megírhatja a szimulációs programot. Mivel a szóbanforgó égi mechanikai probléma nagyon érzékeny a kezdő- és peremfeltételekre, és mert a valósághű modellezéshez viszonylag nagy számú porrészcskével való számolás szükséges, ezért a futtatási idő lecsökkentése érdekében elsősorban IBM PC/AT-nál nem kisebb teljesítményű számítógépekre ajánljuk program-receptünket. (Örömteli módon már az ilyen kaliberű gépek is széleskörben elterjedtek a közép- és felsőoktatásban).

5.1. Szimulációs algoritmus a CKHP-ra



4. ábra Az m_1, m_2 tömegű, O körüli körpályákon keringő B_1, B_2 égitestekkel együttforgó 2 dimenziós koordináta-rendszerben vizsgált elhanyagolhatóan kis m ($\ll m_1, m_2$) tömegű B_3 porszemre ható erők és az egyes tömegpontok helyvektora.

Vegyünk két m_1 és m_2 tömegű B_1 és B_2 égitestet, melyek közös súlypontjuk körül körpályán keringenek, s vizsgáljuk egy, a keringési síkjukba eső, elhanyagolható m ($\ll m_1, m_2$) tömegű B_3 porszem mozgását azok gravitációs terében. Koordináta-rendszerünk O origója legyen B_1, B_2 közös súlypontjában, az x tengely pedig B_1, B_2 -höz rögzítve a 4. ábrán látható módon. B_1, B_2 és B_3 helyvektora rendre r_1, r_2 és r . Tételezzük fel, hogy a B_3 porszem elég nagy tömegű ahhoz, hogy a napszél hatása elhanya-

golható legyen a ráható alábbi erőkhöz képest. A porszemre egyrésről hat a B_1 és B_2 által kifejtett

$$\underline{G}_1 = \frac{\gamma m_1 m(r_1 - r)}{|r_1 - r|^3}, \quad \underline{G}_2 = \frac{\gamma m_2 m(r_2 - r)}{|r_2 - r|^3} \quad (1)$$

Newton-féle gravitációs erő (ahol γ a gravitációs állandó), másrésről pedig az együttforgó koordináta-rendszerben fellép a

$$\underline{c}_f = m\omega^2 r \quad (2)$$

centrifugális erő és a

$$\underline{c}_o = 2m\omega \times \underline{v} \quad (3)$$

Coriolis-erő, mint tehetetlenségi erők. Így a porszem mozgásegyenlete Newton II. törvénye alapján

$$m\underline{a} = \underline{G}_1 + \underline{G}_2 + \underline{c}_f + \underline{c}_o. \quad (4)$$

Az $\underline{\omega}$ szögsebességvektor merőleges az xy síkra; az egyes vektorok koordinátái pedig a következők az xyz koordináta-rendszerben

$$r_1 = (-r_1, 0, 0), \quad r_2 = (r_2, 0, 0), \quad r = (X, Y, 0), \quad (5)$$

$$\underline{\omega} = (0, 0, \omega), \quad \underline{v} = (\dot{X}, \dot{Y}, 0), \quad \underline{v} \times \underline{\omega} = (\dot{Y}\omega, -\dot{X}\omega, 0),$$

ahol

$$r_1 = R\mu, \quad r_2 = R(1 - \mu), \quad \omega = \left[\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{R^3} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$$\mu = m_2 / (m_1 + m_2), \quad m_2 < m_1, \quad R = |r_1 - r_2|.$$

Az (1), (2), (3), (5), (6)-t (4)-be helyettesítve, bevezetve az

$$x = X/R, \quad y = Y/R \quad (7)$$

dimenziótlan koordinátákat, a B_3 porszem gyorsulásának $\ddot{x}, \ddot{y}$ komponenseire (4)-ből a következőt kapjuk

$$\ddot{x} = -a \frac{x + \mu}{f(x, y, \mu)} + b \frac{1 - \mu - x}{g(x, y, \mu)} + c^2 x + 2c\dot{y}, \quad (8)$$

$$\ddot{y} = -a \frac{y}{f(x, y, \mu)} - b \frac{y}{g(x, y, \mu)} + c^2 y - 2c\dot{x},$$

$$a = \frac{\gamma m_1}{R^4/3}, \quad b = \frac{a\mu}{1 - \mu}, \quad c = \left[\frac{a}{(1 - \mu)R^5/3} \right]^{1/2},$$

$$f(x, y, \mu) = [(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2},$$

$$g(x, y, \mu) = [(1 - \mu - x)^2 + y^2]^{3/2}.$$

A B_1, B_2 égitestekkel egy egyenesbe eső L_1, L_2, L_3 Lagrange-pontok abszcisszáját (8)-ből határozhatjuk meg $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$ helyettesítéssel, aminek megtétele után kapjuk

$$F(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + d_5 x^5 = 0, \quad (9)$$

$$d_0 = b\mu^2 - a(1 - \mu)^2, \quad d_1 = 2a(1 - \mu) + 2b\mu + c^2\mu^2(1 - \mu)^2,$$

$$d_2 = b - a + 2c^2\mu(1 + 2\mu^2 - 3\mu), \quad d_3 = c^2(1 - 6\mu + 6\mu^2),$$

$$d_4 = 2c^2(2\mu - 1), \quad d_5 = c^2.$$

Ezt az ötödfokú egyenletet csak numerikusan oldhatjuk meg, például a Newton-féle érintőmódszerrel, azaz egy kezdő x_0 értékről indulva addig ismételjük az

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}, \quad F'(x) \equiv \frac{dF}{dx} \quad (10)$$

iterációt, amíg a $\Delta x = |x_{i+1} - x_i|$ differencia egy adott kis hibahatáron belülre esik. Tudván, hogy az L_1, L_2, L_3 Lagrange-pontok rendre B_1 baloldalán, B_1 és B_2 között illetve B_2 jobboldalán helyezkednek el, a (9)-nek (10) szerinti numerikus megoldásakor rendre a következő feltételnek kell teljesülnie az L_1, L_2, L_3 pontokra vonatkozó kezdeti abszcisszákra

$$x_{01} < -r_1, \quad (11)$$

$$-r_1 < x_{02} < r_2,$$

$$r_2 < x_{03}.$$

A porrészecske (8) szerinti mozgásegyenletét leg-egyszerűbben az elsőrendű Euler-iterációval oldhatjuk meg. Ekkor azzal a feltételezéssel élünk, hogy elemi $\Delta t \ll T$ ideig, ahol T a B_1, B_2 égitestek keringési ideje, a porrészecske gyorsulása közel állandó; ezért Δt idő múlva az új sebességkomponensek és koordináták a következők lesznek

$$\ddot{x}_i, \ddot{y}_i = \text{állandó}, \quad (12)$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t, \quad \dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \ddot{y}_i \Delta t,$$

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t + 0,5 \ddot{x}_i \Delta t^2,$$

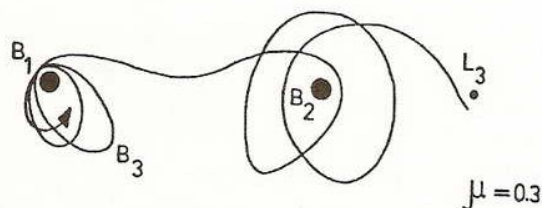
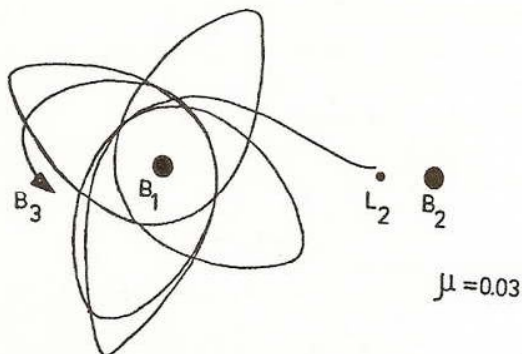
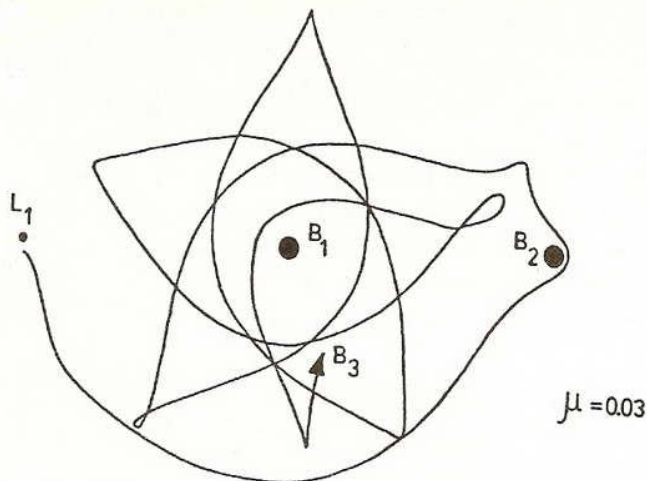
$$y_{i+1} = y_i + \dot{y}_i \Delta t + 0,5 \ddot{y}_i \Delta t^2.$$

Ezt az iterációt számítógép felhasználásával ciklusba foglalva, megoldható a (8) szerinti mozgásegyenlet. A megoldás annál pontosabb, minél kisebb a $\Delta t/T$ hányados. A numerikus megoldás során először ki kell kísérletezni azt a Δt értéket, amely nem túl nagy ahhoz, hogy túl durva legyen a megoldás (azaz változatlan kezdő- és peremfeltételek mellett fokozatosan csökkenő Δt esetén egyre kisebb eltérés adódik a porszem által befutott pálya alakjában), másrészt viszont nem túl kicsi ahhoz, hogy a program futási ideje nagyon hosszú legyen. Akinek nem felel meg az elsőrendű Euler-iteráció nyújtotta számítási pontosság, annak ajánlhatók a magasabb rendű Euler-vagy Runge-Kutta-formulák vagy egyéb numerikus módszerek [10].

5.2. Szimulációs lehetőségek

Célszerű, ha számítógépünk képernyője együtt forog a B_1, B_2 égitestekhez rögzített koordináta-rendszerrel, azaz amelyben a porrészecske mozgásegyenlete a (8) szerinti alakú. Ekkor a B_1, B_2 égitestek és az L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 Lagrange-pontok nyugalomban vannak. Az időt és a Lagrange-pontokat is célszerű megjeleníteni a képernyőn; L_1, L_2, L_3 abszcisszáját (9)-ből határozhatjuk meg, L_4, L_5 pedig a B_1, B_2 -n nyugvó egyenlő oldalú háromszögek csúcsában van.

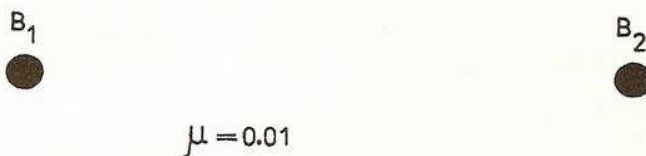
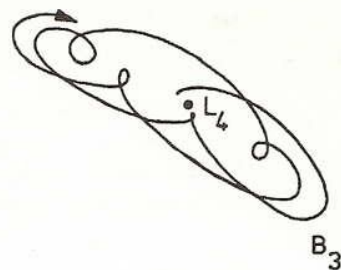
Először ajánlatos külön-külön megvizsgálni az egyes Lagrange-pontokat. Tegyük a közelükbe egy-egy porrészecskét, s az együttforgó rendszerben zérus kezdősebességgel hagyjuk magukra. Az instabil L_1, L_2 vagy L_3 Lagrange-pontok közeléből indított



5. ábra Az instabil L_1 , L_2 és L_3 Lagrange-pontok közeléből zérus kezdősebességgel indított egy-egy porrészecske pályájának kezdeti szakaszai.

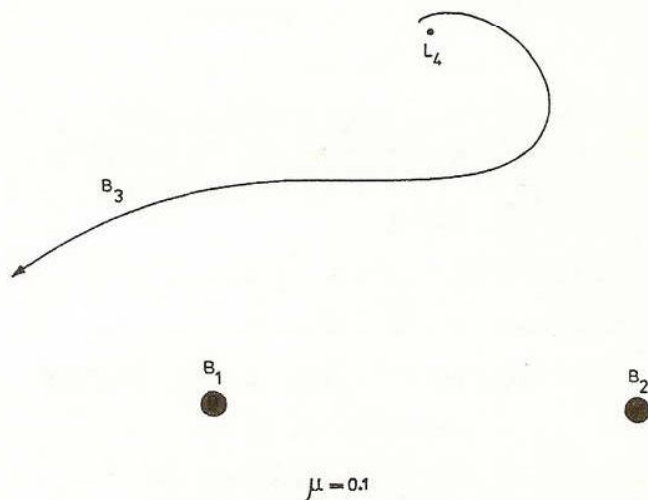
porszemeknél azt tapasztalhatjuk, hogy azok az idő teltével fokozatosan eltávolodnak tőlük. Ezek a porszemek B_1 és/vagy B_2 körül fognak továbbkörülni, esetleg becsapódnak azokba, vagy pedig a szökési sebességnél is nagyobb sebességre gyorsulva fel, kirepülnek a kettős rendszerből. A becsapódást úgy modellezhetjük, hogy előzőleg megadjuk B_1 és B_2 sugarát, s ha valamelyik porszemnek a B_1 vagy B_2 centrumától mért távolsága kisebb lesz ezeknél az értékeknél, akkor megtörtént a becsapódás, s a számítógép nem követi tovább a részecskét. Mivel a rendszerből kiszökő porszemek könnyen túlsordulást idézhetnek elő a számítógépben, ezért célszerű azokat csak egy előre megadott maximális távolságig követni. Ha túllépték ezt a kritikus távot, a számítógép nem foglalkozik tovább velük. Az 5. ábrán egy-egy, az instabil L_1 , L_2 és L_3 Lagrange-pontok közeléből nulla kezdősebességgel induló porrészecske pályájának kezdő szakasza látható. Leolvasható az ábráról, hogy nem fedezhető fel az L_1 , L_2 vagy L_3 körüli librációs mozgás.

Ha viszont a $\mu < \mu_0$ választással stabilá tett Lagrange-féle librációs pontok közeléből indítjuk a porszemeket nulla kezdősebességgel, akkor kezdeti



6. ábra A $\mu < \mu_0$ választással stabilá tett L_4 Lagrange-féle librációs pont közeléből nulla kezdősebességgel induló porrészecske hurkokból álló librációs pályájának kezdeti szakasza.

koordinátájuk megfelelő megválasztása esetén azok librációs mozgást végeznek L_4 , L_5 körül, bizonyítván azok effektív, lokális vonzócentrumként való viselkedését. A 6. ábrán egy ilyen librációs mozgást végző porrészecske pályájának kezdeti szakasza látható. Megfigyelhető, hogy a pálya több hurokból áll, s a porszemcse viszonylag nagy amplitúddal librál. Korábban említettük, hogy a librációs mozgás bizonyos mértékben két különböző frekvenciájú rezgőmozgásból tevődik össze. A 6. ábrán jól látható, hogy a kisebb frekvenciájú és nagyobb amplitúdójú rezgésre miként rakódott rá egy nagyobb frekvenciájú és kisebb amplitúdójú rezgés; az utóbbi eredményezi a jellegzetes pályahurkokat.



7. ábra A $\mu > \mu_0$ választással instabilá tett L_4 Lagrange-féle librációs pont közeléből, a 6. ábra kezdő- és peremfeltételeivel megegyezően induló porrészecske pályájának kezdeti szakasza.

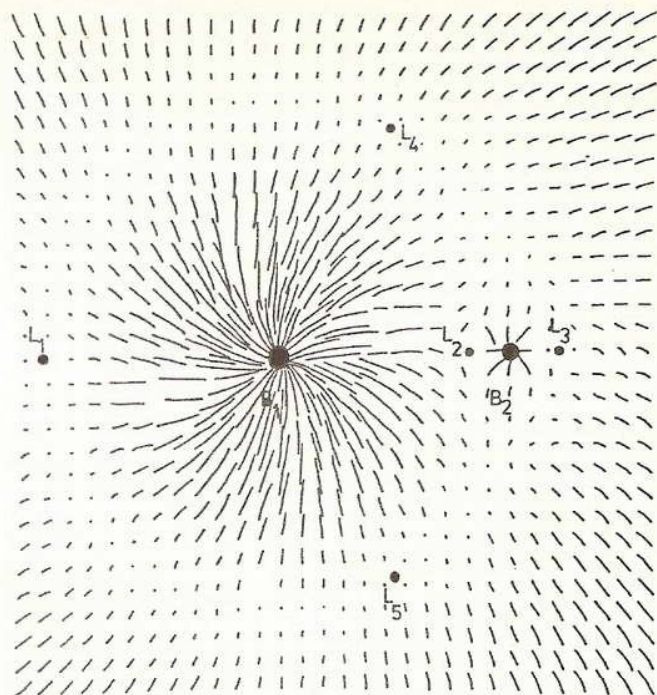
Ha $\mu \geq \mu_0$, akkor a Lagrange-féle librációs pontok lineárisan instabilak. Ekkor a közelükbe helyezett porrészecskék fokozatosan eltávolodnak tőlük, s ugyanarra a sorsra jutnak, mint az instabil L_1 , L_2 és L_3 Lagrange-pontok közeléből indítottak. A 7. ábrán egy porrészecskét ugyanazzal a kezdő- és peremfeltétellel indítottunk L_4 közeléből, mint a 6. ábra porszemét, csak $\mu > \mu_0$ választással L_4 -t instabillá tettük. Jól látható, hogy a korábban librációs mozgást végző porszem most nem librál, hanem egyre inkább eltávolodik L_4 -től.

Ugyanezeket a számítógépes égi mechanikai modellkísérleteket természetesen úgy is elvégezhetjük, hogy nem zérus kezdősebességgel indítjuk a porszemeket. Ekkor azonban vigyáznunk kell, ha a stabil L_4 vagy L_5 pontok effektív, lokális vonzócentrumkénti viselkedését szeretnénk demonstrálni, ugyanis ha túl nagy a porszemek kezdősebessége, azok könnyen kiszakadnak a Lagrange-féle librációs pontok gyenge vonzócentrumából, s eltávolodnak tőlük.

Ugyancsak mi magunk is feltérképezhetjük a stabil L_4 és L_5 pontok környékét, s meghatározhatjuk körülöttük azt a librációs tartományt, ahonnan adott kezdősebességgel indítva egy porszem, az librációt végez. A libráció eldöntésének elégséges feltétele az, hogy a porszem az indítása utáni $\sim 200T$ idő múlva is beleessen az L_4 vagy L_5 köré vont $R\sqrt{3}/2$ sugarú körbe [7]. Ez a feltérképezés persze sok gépidőt tesz szükségessé. Az eredményül kapott tartomány szigetekre és félszigetekre felhasadott végének elemi kis részéből indított porfelhő részecskéinek korábban említett kaotikus viselkedése szintén jól demonstrálható.

Miután a fent leírtak szerinti módon külön-külön megvizsgáltuk az egyes Lagrange-pontokat, a Kordylewski-féle porholdak kialakulásának valóságú modellezésére is vállalkozhatunk. A vizsgált 2-dimenziós kettős rendszerre helyezzünk rá egy négyzetes hálót, aminek rácspontjaiban egy-egy porszem van, s hagyjuk magára a porfelhőt. Minden porszemcse (8) szerinti mozgásegyenletét számítógéppel a korábban leírt módon külön-külön megoldva, megfigyelhetjük a porfelhő fejlődését a képernyőn. Kezdetben célszerű minden porrészecske pályáját megjeleníteni, később azonban ezek a trajektóriák annyira összemósódnak, hogy a kusza görbeseregéből semmit sem lehet kiolvasni. Ezért hosszabb futtatási idő esetén inkább csak a porszemek pillanatnyi pozícióját jelenítsük meg a képernyőn.

A 8. ábrán a porfelhő minden részecskéje zérus sebességgel indult (az együttforgó rendszerben), s az ábra a porhalmaz evolúciójának kezdeti szakaszát mutatja. Rögtön feltűnik egy közel körgyűrű alakú semleges zóna. A tőle kijebb lévő porszemeket a nagy centrifugális erő kirepíti a rendszerből, a beljebb lévőket viszont a nagyobb tömegű B_1 égitest gravitációja magához rántja. A semleges zónában ez a két hatás közel kiegyenlíti egymást, ezért a részecskék



8. ábra 900 porszemről álló, kezdetben együttforgó porfelhő, amelyben a részecskék négyzetes rácsban helyezkednek el, mint a Kordylewski-féle porholdak kialakulása számítógépes modellezésének egyik lehetséges kezdőállapota. Az ábra ezen porfelhő evolúciójának kezdeti szakaszát mutatja a porszemek pályájának feltüntetésével. Jól látható a kis elmozdulású porszemek alkotta semleges, gyűrű alakú zóna.

eredő gyorsulása nagyon kicsi, így az indítástól eltelt rövid idő alatt alig mozdultak csak el. Természetesen az eredő gyorsulás csak a Lagrange-pontokban exaktul nulla, ezért a semleges zóna átmegy az L_1 , L_2 , L_3 , L_4 és L_5 pontokon. Megfigyelhető a kisebb B_2 égitest gyengébb vonzóhatása is, valamint az, hogy a porszemek trajektóriája jobbra térül el a Corioliserő hatására. Hosszabb futtatási idő után (a porszemcskének csak a pillanatnyi helyét megjelenítve) a porfelhő evolúciójának eredményeként B_1 és B_2 körül kialakul egy poröv, s hasonló figyelhető meg a stabil L_4 és L_5 körül is. Az utóbbival lényegében a Kordylewski-féle porholdak kialakulását modelleztük.

Különféle kezdeti feltételekkel kísérletezhetünk. Ha a porfelhő részecskéinek kezdősebessége a B_1 , B_2 -höz rögzített rendszerben nulla, együttforgó porfelhőről van szó; ha a porszemek kezdősebessége az origótól r távolságra $v_0 = \omega \times r$, akkor egy külső, nem forgó rendszerből nézve v_0 sebességgel haladó porfelhővel van dolgunk; ha pedig a porszemek kezdősebessége adott alsó és felső korlát között véletlenszerűen változhat, véletlenszerű porhalmazról beszélünk. A valóságban előfordulhatnak a Naprendszerben elnyúlt pályákon keringő anyaghalmazok (gondoljunk csak a Földet periodikusan bombázó, "hullócsillag"-rajokra), s például ezek és a Föld-Hold rendszer gravitációs kölcsönhatását jól modellezhetjük a haladó porfelhővel. A legvalóságúbban azonban véletlenszerű porfelhővel szimulálható a Kordylewski-féle porholdak kialakulása.

Haladó és véletlenszerű porfelhő esetén a porholdak kialakulása nagyon érzékeny a v_0 sebességre illetve az

említett alsó és felső korlátra. Ha ezek túl nagyok, nem várható a porhalmaz L_4 és L_5 körüli tömörödése. Sokszor a B_1 és B_2 körüli porhalmaz összemósodik az L_4 és L_5 körülivel; s ugyancsak probléma, hogy viszonylag nagy számú (több 100) porrészecskével kell dolgoznunk, hogy látványosan alakuljanak ki porholdak a képernyőn. Maguk a porholdak egyébként nem olyan kompaktnak, mint amit elsőre várunk, mert a részecskék a 6. ábrán is jól láthatóan széles tartományban librálnak.

Éppen ezért a porholdak kialakulásának számítógépes modellezéséhez sok gépidő, a kezdő- és peremfeltételekkel való hosszas kísérletezgetés, rengeteg türelem, kitartás, s lehetőleg egy nagyobb teljesítményű számítógép szükségeltetik. Ha viszont sikerrel járunk el, akkor a megszerzett numerikus, szimulációs tapasztalatokkal felvértezve, további érdekes égi mechanikai kísérletekbe vághatunk bele. Vállalkozhatunk például a Lagrange-pontok és a B_1 , B_2 égitestek körül kialakuló, a kezdő- és peremfeltételekre az előzőeknél még érzékenyebb, de a szemet gyönyörködtető periodikus pályacsaládokra való vadászatra is [5,11].

6. A Lagrange-pontok asztronautikai alkalmazásai

Végül néhány szót szeretnénk szólni azokról a főleg a távoli jövőben megvalósulandó űrtechnikai tervekről, amelyekben a Föld-Hold illetve a Nap-Föld rendszer Lagrange-pontjai játszanak fontos szerepet.

Az egyik ilyen tervben a Föld-Hold rendszer stabil librációs pontjainak effektív, lokális vonzóhatását használnák ki, amennyiben a Földet lassan elárasztó radioaktív hulladéktól úgy szabadulnának meg, hogy a stabil L_4 , L_5 pontokba lőnek fel űrhajóval. Azért pont oda, mert ahhoz, hogy végleg megszabaduljunk tőle (azaz akkora sebességre gyorsítsuk föl, hogy megszökjön a Föld-Hold rendszerből) rendkívül sok energiára lenne szükség; az amúgy is üreszközöktől zsúfolt Föld körüli térség pedig fontosabb űrtávközlési célokra van lefoglalva. A stabil Lagrange-féle librációs pontokba nem túl nagy energiával lehetne feljuttatni a radioaktív szemetet, s ott gyakorlatilag örökre, biztonságban tárolni. Ennek a tárolási módnak meglenne az az előnye is, hogy bármikor visszahozható lenne a Földre a hulladék, s az értékes izotópok reprocesszállással kinyerhetők lennének belőle, vagy később a visszanyerést akár a jövőbeli űrbázisokon is el lehetne végezni. Ezen terv megvalósításához természetesen a mostaninál is biztonságosabb űrtechnikára van szükség, hiszen ha egy veszélyes radioaktív hulladékokat szállító hordozóeszköz a fellövéskor Challenger-szerű katasztrófát szenvedne, ez a légkörnek a Csernobil-katasztrófához hasonló radioaktív szennyeződéséhez vezethetne.

Egy másik tervben a földi légkör üvegházhatás miatti katasztrófális felmelegedésének kompenzálásában szánnak nagy szerepet a Nap-Föld rendszer L_2 Lag-

range-pontjának. Ha az üvegházhatást növelő gázok jelenlegi szintű antropogén kibocsátását nem csökkenteni az emberiség, az a földi átlaghőmérséklet viszonylag rövid időn belüli globális, néhány fokos emelkedéséhez vezet, ami egy katasztrófaláncolatot válthat ki [12]. Ezt elkerülendő, W. Seifritz [13] azt javasolta, hogy juttassanak fel hatalmas fényvisszaverő tükröket a Nap-Föld rendszer L_2 pontjába, amelyek árnyéka így a Földre vetülne. Ezzel a módszerrel, megfelelően nagy felületű tükrök esetén csökkenteni lehetne a besugárzást, azaz kompenzálni az üvegházhatást. Mivel az L_2 Lagrange-pont instabil, s a napszél és a Hold hatására az ott nyugalomban levő tükrök kimozdulnának onnan, aktív (hajtóművek általi) stabilizációra lenne szükség. Mindenesetre ez a terv sajnos egyre aktuálisabbá válik az üvegházhatást okozó gázok emberi eredetű emissziója miatt.

Míg az előző két terv a távoli jövőben valósulhat csak meg, addig a Lagrange-pontok konkrét asztrodinamikai alkalmazására számos példa ismert már napjainkban is. A különböző bolygók körül keringő űrszondák bonyolult, hurkos pályáinak megtervezésében fontos szerepet töltenek be a Lagrange-pontok. Az ISEE-3 mesterséges hold (amelyet később ICE-ra kereszteltek át, s amely a Giacobini-Zinner üstökös kutatásában nagy szerepet játszott, s egyben az első üstökösrandevű főszereplője is volt) 1978-tól több évet töltött a Nap-Föld rendszer egyik Lagrange-pontja közelében. A jövőben pedig számos mesterséges holdat is terveznek librációs pontba juttatni, például a Relikt-2 nevű szovjet berendezést.

IRODALOM

- [1] Horváth G., Jánosi I.: Gravitációs reakciók számítógépes modellezése I. Bolygó-hold-mesterséges hold rendszerek. Fizikai Szemle 37, 406-411 (1987)
- [2] Horváth G., Batori E.: Gravitációs reakciók számítógépes modellezése II. Galaxis-galaxis kölcsönhatások. Fizikai Szemle 37, 456-461 (1987)
- [3] Horváth G.: A Brown-mozgás számítógépes szimulációja. Fizikai Szemle 38, 271-275 (1988)
- [4] Horváth G.: A Rutherford-szórás számítógépes szimulációja. Fizikai Szemle 39, 418-421 (1989)
- [5] Érdi B.: Égi mechanika. (ELTE TTK jegyzet) Tankönyvkiadó, Budapest, p. 429, 1989.
- [6] R. McKenzie, V. Szebehely: Non-linear stability around the triangular libration points. Celestial Mechanics 23, 223-229 (1981)
- [7] J. Györgyey: On the non-linear stability of motions around L_5 in the elliptic restricted problem of the three bodies. Celestial Mechanics 36, 281-285 (1985)
- [8] K. Kordylewski: Photographische Untersuchungen des Librationpunktes L_5 im System Erde-Mond. Acta Astronomica 11, 165-169 (1961)
- [9] J. W. Simpson: Dust-cloud moons of the Earth. Physics Today 20/2, 39-46 (1967)
- [10] Obádovics J., Gy.: Numerikus módszerek és programozásuk. Tankönyvkiadó, Budapest, p. 304, 1977.
- [11] A. A. Jackson, H. A. Zook: A solar system dust ring with the Earth as its shepherd. Nature 337, 629-631 (1989)
- [12] Marx Gy.: A légkör üvegházhatása. Fizikai Szemle 39, 363-370 (1989)
- [13] W. Seifritz: Mirrors to halt global warming? Nature 340, 603 (1989)