

A szivárvány fizikai alapjai

Cserti József¹, Haiman Ottó² és Huhn Andrásné³

Eötvös Loránd Tudományegyetem,

¹Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

²Biológiai Fizika Tanszék

³Anyagfizikai Tanszék

Kivonat

Az egyik legszebb légköroptikai jelenség, a szivárvány sok festőt, költőt (például Arany János: A gyermek és szivárvány) megihletett, és tucatnyi neves fizikus is tanulmányozta. Az interneten több helyen is található fényképeket a szivárványról, és más légköroptikai jelenségekről [1]. Meglepőnek tűnhet, hogy csak a XX. század elején sikerült kidolgozni a szivárvány kialakulására kielégítő fizikai magyarázatot. Ez szükségszerűen lényegesen több, mint a középiskolában is tanított, a geometriai optika alapján adott magyarázat, hiszen figyelembe kell venni a fény hullámtermészetét is. Végül soron a szivárvány létrejötté annak tulajdonítható, hogy elektromágneses hullám (fény) közel gömb alakú vízcseppeken szóródik. Ezen szórást teljes részleteiben csak az elektromágneses terek egységes elméletét leíró Maxwell-egyenletek alapján érthetjük meg. Ebben a cikkben sorra vesszük a szivárvány megértésében elért főbb eredményeket, melyek végül a mai általánosan elfogadott fizikai elmülethez vezettek, és amelyek — korántsem véletlenül — az egész optika fejlődésére hatással voltak. Úgy véljük, hogy a mai számítógépes lehetőségek nagyban hozzájárultak az elmületek szakszerű kifejtéséhez, valamint a gondolataink adatokkal és ábrákkal történő jobb megvilágításához.

Áttekintés

Szivárványt olyankor láthatunk, amikor előttünk lebegő vagy hulló esőcseppekre a mögöttünk lévő Nap rásüt. A természetben két köríve figyelhető meg könnyen: a főszivárvány és — körülötte koncentrikusan — a halványabb mellékszivárvány. A főszivárvány belső széle kék, míg a külső vörös színű. A mellékszivárványban a színek sorrendje fordított, a belső széle vörös, a külső kék. Alapossabb megfigyelésekből kiderül, hogy a szivárvány e két íve közti tartomány jelentősen sötétebb, mint az ég sávon kívüli, szomszédos részei. Ezt a sötét sávot az ókori *Aphrodisias Alexander* tiszteletére, aki Kr. e. 200-ban írta le először ezt a jelenséget, *Alexander-féle sötét sávnak* nevezik.

A főszivárvány alatt ritkán további járulékos íveket is látunk (angolul *supernumerary arcs*). Egy kitűnő felvétel a [2] internetcímen található. Mint látni fogjuk, ezen járulékos ívek létrejöttének kérdése alapvetően motiválta a szivárvány elmületeinek továbbfejlesztését.

Arisztotelész úgy vélte, hogy a szivárvány a napfény felhőkön történő visszaverődésének a következménye. Ez a feltételezés egyáltalán nem volt nyilvánvaló a kor akkori elképzelései alapján, ugyanis korábban úgy gondolták, hogy a szivárvány egy anyagi objektum az ég egy meghatározott helyén. Több arab tudós, köztük *Ibn al-Haiszam* is tanulmányozta a szivárványt. Szerinte a nedves és sűrű levegő gömb alakú tükörként veri vissza a napsugarakat [3], ami ebben a megfogalmazásban naiv hipotézisnek tűnhet, de a szivárvány létrejöttének korszerű metaforáihoz hasonló szemléletet tükröz.

A körré kiegészített szivárvány átmérőjének látószögét — mint a szivárvány legfontosabb adatát — zseniális megérzéssel elsőként *Roger Bacon* mérte meg 1266-ban. Eredményei szerint főszivárványra a szivárvány ívének egy pontjából a Nap felé és a megfigyelő felé mutató irány 42°-os szöget

zár be. Mellékszivárványra ez a szög 50° . Jelentősebb előrelépés a szivárvány megértésében Arisztotelész után csak 17 évszázad elteltével, a német Freiberg-i *Theodorik* szerzetesnek köszönhető. Ő megcáfolta Arisztotelész hipotézisét, miszerint a szivárvány a fénysugarak a felhőben lévő esőcseppeken történő *együttes* visszaverődésének a következménye. Mérésekkel igazolta, hogy fehér fénynek a szivárványra jellemző színekre való felbomlása akkor is létrejöhet, ha a fény csak egyetlen vízcsepről verődik vissza. Kísérleteihez vízzel töltött üveggömböt használt, és megfigyelte színes csíkot létrehozó fénysugarak menetét.

Lényegében három évszázadon át elfelejtették Theodorik eredményeit. *René Descartes* 1637-ben mutatta meg újra, Theodoriktól függetlenül, hogy a főszivárvány keletkezésénél a fény először megtörve behatol a vízcseppbe, ezután annak belső felületén *egyszer* visszaverődik, majd ismételt fénytöréssel kilép belőle, és végül irányváltozás nélkül jut be a szemünkbe. A mellékszivárvány esetében a vízcseppen belül *két* visszaverődés történik. A szivárvány egységes geometriai optikai értelmezése Descartes nevéhez fűződik. Theodorik és Descartes magyarázata szerint, a szemünkbe érkező, különböző színű fénysugarak eltérő vízcseppekből jönnek. Itt jegyezzük meg, hogy helyesnek bizonyult feltételezéseikből többek között azon tény is következik, hogy két (nem azonos) helyen észlelő ember vagy detektor (pl. fényképező) — még ha „ugyanazon” szivárvány azonos színű csíkját figyeli is meg, nem ugyanazon cseppek által létrehozott jelenséget észleli. Sarkosabban fogalmazva: két ember egymás mellett állva sem láthatja ugyanazt a szivárványt, csak ugyanolyat.

A fény hullámtermészetének felfedezése után az érdeklődés ismét a szivárvány felé fordult. Az első előrelépés *Thomas Young* nevéhez fűződik, aki a szivárványnak a fényhullámok *interferenciájára* épülő elméletét 1804-ben dolgozta ki. Röviddel ezután, 1808-ban a francia *Étienne-Louis Malus* mérnöknek, és tőle függetlenül 1815-ben az angol *David Brewster*nek a fény polarizációval kapcsolatos megfigyelései sejtették Young elméletének hiányosságait. 1838-ban *George Biddell Airy* tovább pontosította a Young-elméletet, és a szivárványt *elhajlási* (diffrakciós) jelenségként értelmezte. Elmélete alapján sikerült megmagyarázni a szivárvány járulékos íveit. Ugyanakkor, az Airy-elmélet sem vette figyelembe a fény polarizációját. A későbbi kutatások során kiderült ennek az elméletnek a közelítő jellege, és az érvényességi határa is. Látni fogjuk, hogy a közel 0,1 mm-nél kisebb méretű vízcseppekre az Airy-elmélet eredményei sem tekinthetők egzakt megoldásoknak.

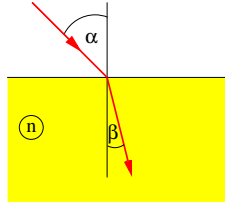
Ezekre Airy 1838-as eredményeit követően, fél évszázadot kellett várni. *James Clerk Maxwell* 1862-ben megjelent *Az erővonalak fizikája* (*On the Physical Lines of Force*) című cikkében szerepelnek először a róla elnevezett egyenletek. Ezen egyenletek felhasználásával tetszőleges méretű és törésmutatójú gömb alakú anyag fényszórására elsőként 1890-ben *Ludvig V. Lorenz*, majd jóval később, tőle függetlenül, 1908-ban *Gusztav Mie*, és egy évvel később henger alakú szórótestekre *Peter J. W. Debye* vezetett le analitikus megoldást. Az irodalomban leggyakrabban, méltatlanul nem említve Lorenz és Debye nevét, az egzakt elméletet egyszerűen Mie-elméletnek nevezik. Annak ellenére, hogy az elmélet fizikailag egzakt, nagy hátránya, hogy egyrészt matematikailag nehezen nyomon követhető a korábbi elméletek közelítő jellege, másrészt pedig reménytelennek látszott abban az időben a kísérleti eredményekkel összevethető numerikus jósátság kiszámítása. Sokáig feledésbe is merült ez az elmélet. Csak az utóbbi évtizedekben, a számítógépes lehetőségek javulásával került ismét az érdeklődés középpontjába a Mie-elmélet. E cikk néhány eredményét is ilyen számítógépes program segítségével nyertük. A Mie-elmélet további érdeme, hogy vele sikerült értelmezni a később részletesebben taglalt koszorú és glória jelenséget is. Végül érdemes megjegyezni, hogy több neves fizikus mutatott rá a szivárvány-probléma és az atomokon szóródó részecskék kvantummechanikai szórási problémája közti hasonlóságra.

E rövid történeti áttekintés után talán nem meglepő, hogy a szivárvány jelenségének irodalma óriási. Magyar nyelven *Honyek Gyulának* a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban megjelent írását [4] javasoljuk bevezetésként. A meteorológus képzésben például *Czelnai Rudolf* egyetemi jegyzete [5], *Bencze Pál*, *Major György és Mészáros Ernő* tankönyve [6], valamint *László István* tanulmánya [7] foglalkozik a szivárvánnyal. A téma iránt behatóbban érdeklődő olvasóknak ajánlhatjuk e cikk egyik szerzőjének a közelmúltban magyarul megjelent áttekintő, matematikai részleteket és további idegen nyelvű közlemények irodalmi jegyzékét is tartalmazó három részes cikkét [8].

A szivárvány megértésében kulcsfontosságúnak számító elméleteket a három legfontosabbnak bizonyult és időben is az alábbi sorrendben kidolgozott elméletek köré csoportosíthatjuk: (i) Descartes geometriai optikán alapuló elmélete, (ii) a szivárvány korai hullámelméletei, és (iii) a Maxwell-egyenletek alapján kidolgozott Mie-elmélet.

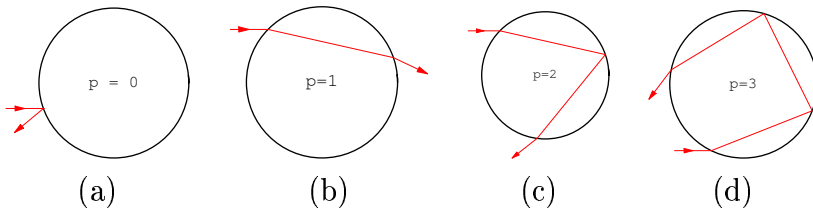
A szivárvány Descartes-féle geometriai optikai elmélete

Vizsgáljuk meg, hogy egy gömb alakú vízcseppen visszaverődve és törve, miként szóródik a fény. Számításai során Descartes a ma már jól ismert töréstartörvényt, mai nevén *Snellius–Descartes-törvényt* alkalmazta. Az 1. ábra mutatja, hogyan változik meg a levegőből érkező fénysugár (valójában keskeny fénynyaláb) iránya, ha egy másik közeg (pl. víz) határához érkezik. Az α beesési szögre és a megtört



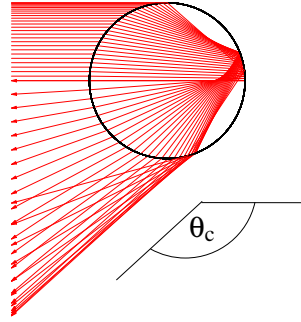
1. ábra. A fénysugarak törése.

sugár β törési szögére a következő egyenlet teljesül: $\sin \alpha / \sin \beta = n$, ahol n az anyag törésmutatója, ami a fény levegőben és a közegben mért terjedési sebességének az aránya (levegő és víz esetén hozzávetőleg 1,33). Az ezen töréstartörvény alkalmazásával megszerkesztett a 2. ábrán azt mutatjuk be, hogy a vízcseppre érkező keskeny fénynyaláb egy része visszaverődik a csepp külső felületéről (a), egy bizonyos része megtörik, majd keresztül haladva a vízcseppben ismételt töréssel kilép abból (b), illetve más része a csepp belső felületén egyszer (c), kétszer (d) (esetleg kettőnél többször) visszaverődik, mielőtt kilép a cseppből. Az egyes sugármeneteket a vízcseppben belüli hurok p számával jellemezzük.



2. ábra. A balról vízszintesen beeső fénysugarakat a vízcsepp különböző módon téríti el. Az egyes sugármeneteket a körben lévő hurok p számával szokás osztályozni.

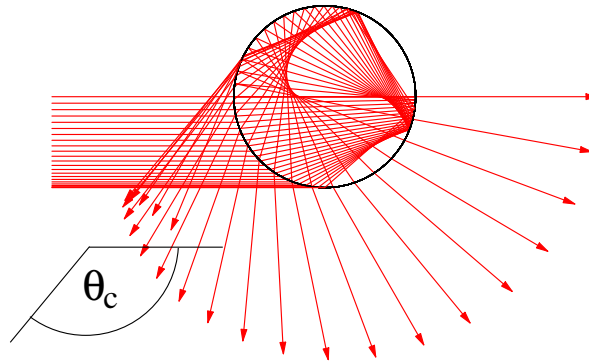
Kettőnél több belső visszaverődésnél $p > 3$. Megmutatható, hogy a $p = 0$ és $p = 1$ (2a és 2b ábra) sugármenetek nem játszanak szerepet a szivárvány kialakulásában [8]. A fő- és a mellékszivárvány esetében a $p = 2$ és $p = 3$ (2c, illetve 2d ábra) sugármenetek valósulnak meg. A Nap fénye közel párhuzamosnak tekinthető fénysugarakként érkezik az esőfelhőben lévő vízcseppek felületére. Descartes nagy türelemmel, körzővel és vonalzóval, valamint a töréstartörvényt felhasználva szerkesztette meg közel száz párhuzamosan beeső fénysugár menetét egyszeres belső visszaverődés esetén (2c ábra). Ma már könnyen írhatunk olyan számítógépes programot, amellyel ez a feladat gyorsan megoldható. Az eredmény a 3. ábrán látható. A vízcseppből kilépő fénysugarak irányát jellemezhetjük az ún. θ szórási szöggel, ami a belépő és kilépő sugár közti szög. A 3. ábrából szembejövő, hogy a $p = 2$ esetben a vízcseppből kilépő összes fénysugár θ szórási szöge *nagyobb* egy bizonyos $\theta_c(p = 2)$ szögnél [8]. Ezen szöghöz tartozó sugarat Descartes nevének latin megfelelője szerint *Cartesius-sugárnak* nevezzük. Jól látható a 3. ábrából, hogy a Cartesius-sugár közelében beeső párhuzamos sugarak a vízcseppből kilépve közel párhuzamosak maradnak, ami egy egybefüggő (kollimált), és ezért intenzív nyalábot eredményez. A távolabbi sugarak által alkotott nyaláb a vízcseppből kilépve szétszóródik.



3. ábra. A vízszintesen balról beeső fénysugarak menete főszivárványnál ($p = 2$).

Így a Cartesius-sugármenetnek kitüntetett szerepe van: a főszivárványt a Napból érkező, a cseppeken nem szoródott fénysugarakhoz képest $180^\circ - \theta_c(p = 2)$ irányból látjuk legintenzívebbnek [8].

Hasonló módon alakul ki a halványabb mellékszivárvány. A 4. ábrán ugyancsak számítógépes programmal szerkesztettük meg a balról párhuzamosan beeső sugarak kilépését, miután a vízcsepp belső felületén *kétszer* szenvednek teljes visszaverődést (2d ábra). Ekkor a kilépő összes fénysugár θ



4. ábra. A vízszintesen balról beeső fénysugarak menete mellékszivárványnál ($p = 3$).

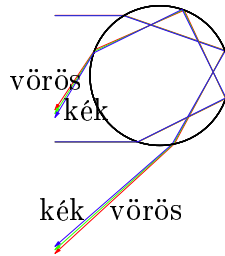
szórási szöge *kisebb* egy kritikus $\theta_c(p = 3)$ szögnél ($\theta_c(p = 3) < \theta_c(p = 2)$). Ismét megmutatható, hogy a mellékszivárványt $180^\circ - \theta_c(p = 3)$ irányból látjuk legintenzívebbnek [8].

Eddig nem szóltunk a szivárvány színeiről. Newton 1666-ban fedezte fel, hogy a fénytörő közegek törésmutatója függ a fény hullámhosszától, színétől. A fehér fényt egy üvegprizma ezért színösszetevőire bontja. Hasonlóan válik színessé a szivárvány is. A víz törésmutatója nagyon kicsit eltér a különböző hullámhosszakra, ezért a Cartesius-sugármenethez tartozó θ_c szög is kismértékben függ a fény színétől. Ez egyben magyarázza a szivárvány színes csíkjainak keskenységét és könnyű megfigyelhetőségét az Alexander-féle sötét sáv két szélén. Az 1. táblázatban összefoglaltuk a különböző színekre számolt $180^\circ - \theta_c$ szögeket [8]. Az 5. ábrán látható a különböző színű fénysugarak törése a

színek	n	$180^\circ - \theta_c$	
		p=2	p=3
vörös	1,330	42,5°	50,1°
zöld	1,335	41,8°	51,4°
kék	1,340	41,1°	52,7°

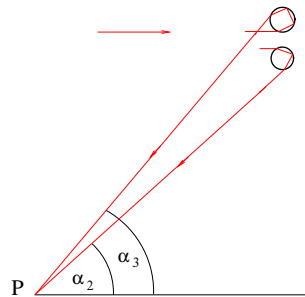
1. táblázat. A főszivárvány ($p = 2$) és mellékszivárvány ($p = 3$) különböző színű sávjai $180^\circ - \theta_c$ szögben láthatók a Napból érkező fénysugarak irányához képest.

fő- illetve mellékszivárvány kialakulásakor.



5. ábra. A kék és vörös színű fénysugarak menete főszivárvány (egyszeres belső visszaverődés) és mellékszivárvány (kétszeres belső visszaverődés) esetén, mikor az 1. táblázat szerinti törésmutatójú vízcseppbe lépő fénysugarak vízszintesek.

A fentiek alapján már könnyen megérthetjük, hogy miként alakul ki a szivárvány két íve. A 6. ábra az esőfelhő két különböző helyén lévő vízcseppjében a Cartesius-sugármenetet mutatja vörös színre a fő- és a mellékszivárványnál. Mint láttuk, ezekből az irányokból érkezik az esőcseppekről a legin-



6. ábra. A P megfigyelőhöz érkező legintenzívebb fénysugarak iránya a beeső fény irányához viszonyítva $\alpha_2 = 42,5^\circ$ -os és $\alpha_3 = 50,1^\circ$ -os a fő- és mellékszivárvány vörös színű sávjára.

tezivebb fény egy távoli P megfigyelőhöz. Ha a cseppből kilépő Cartesius-sugarat a Naptól érkező fénysugár irányába mutató, és a P ponton átmenő tengely körül (a 6. ábrán a vízszintes vonal) úgy forgatjuk el, hogy közben a sugár mindig $\alpha_2 = 180^\circ - \theta_c(p = 2)$, illetve $\alpha_3 = 180^\circ - \theta_c(p = 3)$ szöget zárjon be a bejövő fény irányával, akkor az egyenes egy kúppaláston mozog. Ennek a kúpnek a nyílásszöge szabja meg azt, hogy mekkora átmérőjű körnek látnánk a szivárványt, ha a látott ívet körre egészítenénk ki. Fontos itt is megemlíteni, hogy a szem által „vizsgált” vagy lefényképezett térfogatban meglévő számtalan csepphez ugyanannyi kúp tartozik, melyek mindegyikének azonos a nyílásszöge, és ez egyben a látott szivárványok látószöge is. Amint azt korábban már említettük, minden észlelőnek „saját” szivárványa van.

Az 1. táblázat igazolja azokat a megállapításokat, amelyeket a szivárványon belüli színek sorrendjéről tettünk. Mivel az 1. táblázat szerint $180^\circ - \theta_c(p = 3) > 180^\circ - \theta_c(p = 2)$, e két szög közti irányokból az adott színű fény sem a főszivárványból, sem a mellékszivárványból nem juthat a szemünkbe. A két szög közti irányokban, vagyis a fő- és mellékszivárvány között egy sötét tartomány alakul ki, a bevezetőben említett *Alexander-féle sötét sáv*. Az 1. táblázatból látható, hogy $180^\circ - \theta_c$ értéke főszivárványnál és vörös színre a legnagyobb, mellékszivárványnál pedig a legkisebb. Így az Alexander-féle sötét sáv a $42,5^\circ$ és az $50,1^\circ$ szögek közti irányokban látható.

A szivárvány Airy-féle hullámelmélete

A Descartes-féle elmélet szerint a szivárvány szöge nem függ a vízcsepp méretétől, és a fény hullámhossza is csak a törésmutatón keresztül érvényesül a képletekben [8]. A szivárvány jelenségének megértésében tovább lépés Descartes után közel kétszáz évvel következett be, a fény *hullámtermészetének* beigazolódása, azaz kísérletekkel történt bizonyítása után.

A szivárvány jelenségeinek teljes magyarázatánál nem tekinthetünk el a fény két tulajdonságától: a tranzverzális hullámtermészetéből fakadóan az esetleges polarizáció, és az interferencia-képesség következményeitől.

A fény tranzverzális elektromágneses hullám, melyben mind az elektromos, mind pedig a mágneses tér merőleges a fény terjedésének irányára. Egy törőfelületre érkező fény elektromos térerőssége mindig felbontható a beesési síkkal párhuzamos és arra merőleges komponensre.

Általában a természetben megfigyelt fényben pl. a napfényben átlagosan egyenlő mértékben, de időben véletlenszerűen váltakozó arányban van jelen a kétféle polarizáció. Az ilyen fényt polarizálatlan vagy „természetes” fénynek is szokás nevezni. Egy törőközeg hátáráról visszavert fény intenzitása különböző a határfelülettel párhuzamosan és arra merőlegesen polarizált fényre. Megmutatható, hogy a szivárványból szemünkbe gyakorlatilag csak a visszaverődési síkra merőlegesen polarizált fény érkezik [8]. Egy lineáris polárszűrőn keresztül nézve a szivárvány ívének azon szakasza tűnik el, ami merőleges a polárszűrő átérésztési síkjára.

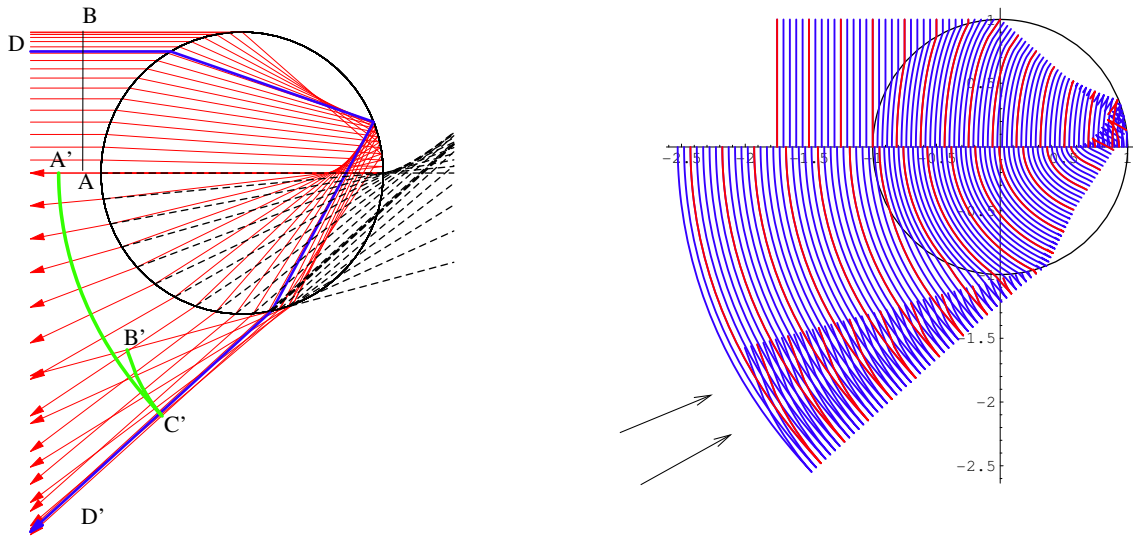
A vízcseppből kilépő fény intenzitása hatványszerűen csökken a többszörös belső visszaverődések során (a húrok p számának növekedésével). Ezért a természetben a magasabb rendű szivárványokat ($p > 3$) csak nehezen és ritkán figyelhetjük meg. Ráadásul a háttérül szolgáló égbolt fénye, valamint a vízcseppek felületéről visszavert ($p = 0$) fény intenzitása is elnyomja a magasabb rendű szivárványokat.

A szivárvány polarizációs sajátosságainak mérése nagy mértékben függ a szerencsétől, mivel a tü-nemény észlelhetősége megjósolhatatlan. Egy szivárvány fölbukkanásakor általában nincs kéznél polariméter, mikor pedig van nálunk polariméter, akkor meg többnyire nincs szivárvány. Egy újabb eljárás (az ún. képkövető polarimetria) módszereivel és meglehetősen költséges berendezéseivel 2003-ban sikerült először „polarimétervégre” kapni egy szivárványt [9, 10]. Az eredmények elemzésével számos korábbi számítás helyességét lehetett igazolni.

Időnként a főszivárvány belső köríve alatt járulékos szivárványokat is megfigyelhetünk, amelyekre elsőként Thomas Young adott magyarázatot 1804-ben. Lényegében arról van szó, hogy a vízcseppből kilépő fénysugarak különböző hosszúságú utakat tesznek meg a megfigyelőig, és így az útkülönbségekből adódóan interferálhatnak egymással. Ez az interferencia eredményezi a járulékos ívek kialakulását [8]. Az interferenciakép elmosódhat a vízcseppek különböző mérete miatt. A kisméretű vízcseppekben az egyes színekhez tartozó interferencia-erősítések átfedhetik egymást, miáltal a szivárvány egyes járulékos ívei fehérré válnak (ha egyáltalán még elég intenzívek). Ezért fehérek, nem pedig színesek a víz-felhők a szivárványszórásnak megfelelő szögekből nézve is, hiszen bennük igen apró vízcseppek vannak.

Young interferencia-elméletével a szivárvány főbb vonásai kvalitatíve jól magyarázhatók. Azonban hiányzott még egy pontos matematikai elmélet a szórt fény intenzitásának a vízcsepp méretétől és a szórési szögtől való függésének leírására. Young elmélete szerint az Alexander-féle sötét sáv szélén az intenzitás hirtelen esik nullára. Ugyanakkor egy tökéletes hullámelmélet szerint ilyen hirtelen változás nem léphet fel az intenzitás szögfüggésében, hiszen az elhajlás miatt a geometriai optika szerinti sötét tartományba, az árnyéktérbe is szóródik fény. Az intenzitás az árnyéktér és a megvilágított tartomány között folytonosan változik. Az elhajlás ezen speciális esetének pontos leírása meglehetősen nehéz feladat. Jelentős előrelépés 1838-ban *George Biddell Airy*-nek köszönhető, akinek sikerült pontosabb matematikai leírást adni a szivárványról, miközben az elhajlás általános elméletét is megalapozta.

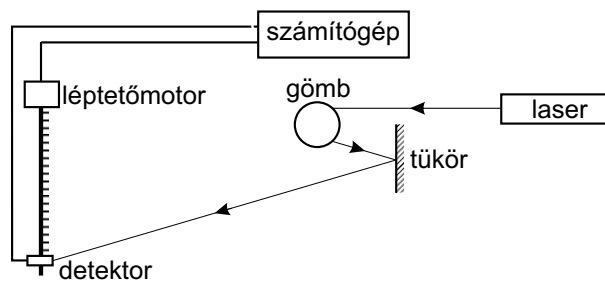
Röviden tekintsük át az elmélet főbb gondolatát! A vízcseppre egymással párhuzamosan érkező „fénysugarak” azonos idő után különböző utat tesznek meg. Ezért a 7. ábra baloldalán látható, a bejövő fénysugarakra merőleges síkú AB hullámfront a vízcseppből kilépve már nem lesz sík alakú. Világos az ábrából az is, hogy az eredeti hullámfront egy részének a fénysugarai már a B' és C' pontokba jutása előtt kezdik keresztezni a front másik részének a sugarait. Mindezt a 7. ábra jobb oldali részének számítógéppel megjelenített frontrendszer is mutatja. Mivel itt két front halad egymást követve, ezek különböző hosszúságú utakat tesznek meg a megfigyelőig, és egymással interferálnak. Az ábrán jól látható, hogy például a nyíllal jelzett irányokban erősítik egymást a frontok. Ezekben az irányokban láthatók a járulékos ívek. Airynek sikerült közelítőleg kiszámítani a megfigyelőhöz érkező



7. ábra. A bal oldali ábra mutatja, hogyan deformálódik a kezdetben síkú hullámfront (AB) alakja egy bizonyos idő elteltével ($A'C'B'$ görbe). A D és D' pontokon átmenő vastag vonal a Cartesius-sugármenetet jelöli. A jobb oldali ábrán számítógéppel szerkesztettük meg a hullámfrontok terjedését és a járulékos íveket eredményező alakváltozásait. A nyilak irányába nézve látjuk az első két járulékos ívet.

fény intenzitásának a szögfüggését [8]. Az Airy-elmélet eredményei jól közelítik a mért szögfüggést, és csak kis méretű vízcseppekre ($R \leq 0,1$ mm, ahol R a gömb alakú csepp sugara), illetve $\theta \gg \theta_c$ szögekre (a főtávárvány irányától „távol”) nem adnak helyes eredményt. A fény hullámhosszához képest jóval nagyobb méretű vízcseppek esetén a Descartes- és az Airy-elmélet által jósolt szórési szögek jó közelítéssel megegyeznek. A vízcsepp méretének csökkenésével az eltérés nő. Ezzel függ össze az a tény, hogy a járulékos íveket mindig a főtávárvány ívének legmagasabb pontján figyelhetjük meg, ahol a vízcseppek mérete még viszonylag kicsi. Miközben a vízcseppek lefelé esnek, méretük fokozatosan nő, és az intenzitásgörbe csúcsai egyre sűrűbben váltakoznak. Ugyanakkor, túlságosan kis méretű vízcseppek esetén ($R \leq 0,05$ mm) a különböző színekhez tartozó csúcsok átfedik egymást, a járulékos ívek fehérre válnak.

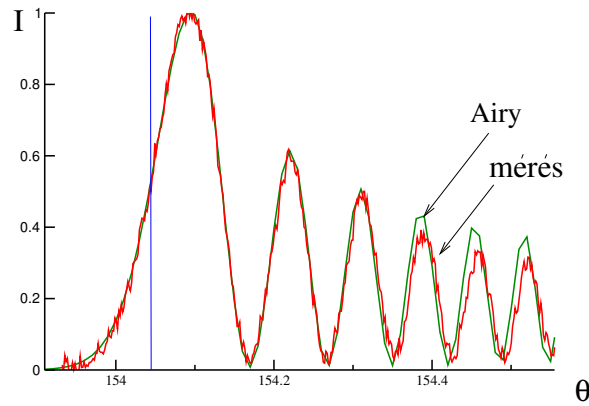
Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Anyagfizikai Tanszékének kísérleti laboratóriumában Huhn Andrásné végzett méréseket üveggömbön lézervény segítségével. A mérés elrendezése a 8. ábrán látható. Az üveggömből szórt fény irányától függő intenzitását a tükörtől nagy távolságban egy fé-



8. ábra. A mérés elrendezése.

nyelem méri, amelyet a sugarakra merőleges irányban egy léptetőmotor mozgat finom lépésközzel. A 12 mW-os lézervedióda fényének λ hullámhossza $0,650 \mu\text{m}$. A számítógép vezérli a motort, gyűjti a detektor jeleit, és regisztrálja a mért intenzitás szögfüggését. Az Airy-elméletből nyert, és a mért intenzitásgörbe összehasonlítása a 9. ábrán látható. Megállapíthatjuk, hogy az Airy-elméletből kapott intenzitás szögfüggése még a járulékos ívek szögei tekintetében is jól egyezik a méréssel. Később összehasonlítjuk az Airy-elméletet a következő fejezetben ismertetett, egzakt elmélettel. Jelentősebb

eltérések csak kis méretű vízcseppek esetén ($R \leq 0,1 \text{ mm}$), θ_c -nél jóval nagyobb szögértékeknél, illetve magasabb rendű szivárványok ($p > 3$) esetében adódnak. Ezen esetekben elkerülhetetlen a szivárványnak a Maxwell-egyenleteken alapuló tárgyalása, ami bonyolultabb matematikai módszereket, és jóval több numerikus számolni valót jelent.



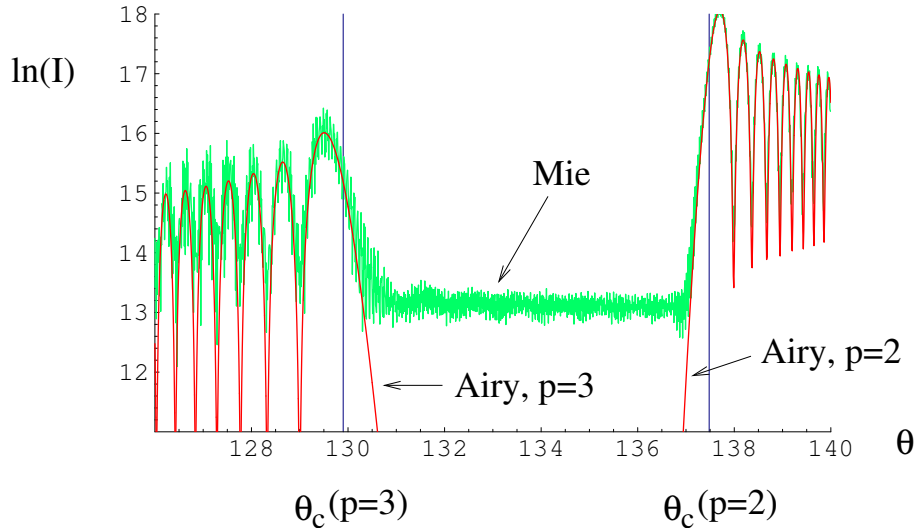
9. ábra. Az Airy-elmélet és a mérési eredmény összehasonlítása főszivárvány ($p=2$) esetén. A számítás és a mérés polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 0,650 \mu\text{m}$, $n = 1,467$) és $R = 5,25 \text{ mm}$ sugarú üveggömbre vonatkozik. A függőleges vonal az üvegre számolt $\theta_c(p = 2) = 154,04^\circ$ szórási szögnek felel meg. A mért és a számolt intenzitást az első csúcs intenzitásának egységében adtuk meg.

A szivárvány egzakt Mie-elmélete

A előbbi fejezetben vázolt Airy-elmélet nem képes egzaktul leírni a szivárványban megfigyelhető finom részleteket, mivel a hullámfront alakjának a terjedés során bekövetkező változását csak közelítőleg veszi figyelembe. A kérdésre egzakt választ a Mie-elmélet adott. A két elmélet közötti különbség nem csak a közelítés pontosságán múlik, hanem a jelenség hullámfüggvényekkel való leírásának módján is. Az Airy-elmélettől eltérően, a Mie-elméletben a vízcseppeken történő fény szórását a fény terjedését leíró Maxwell-egyenletek alapján vesszük számításba. A Mie-elmélet alap gondolata a következő. A vízcsepre érkező fény egy elektromágneses síkhullámnak tekinthető, amely szóródik a vízcseppen. A fény \mathbf{E} elektromos és \mathbf{B} mágneses térerősségevektorait a Maxwell-egyenletek írják le. A vízcsepp által szórt és a vízcsepp belüli elektromágneses tereket a problémához jobban illeszkedő gömbhullámok szerint sorfejtjük. A sorfejtési együtthatókat a vízcsepp határfelületén érvényes peremfeltételekből határozhatjuk meg. Ismerve a sorfejtési együtthatókat (Mie-együtthatók), a tér bármely pontjában felírhatjuk az elektromos és a mágneses teret. Az eredmény egy végtelen sor összegeként áll elő. Ezt a megoldást tekintjük egzaktnak. Az elektromágneses tér ismeretében kiszámíthatjuk a szórt fény intenzitásának szögfüggését. A számítások meglehetősen bonyolultak, ezért itt nem részletezzük. A Mie-elmélet alapjairól magyar nyelvű összefoglalót *László István* tanulmányában [7], illetve a *Mészáros Ernő* által szerkesztett könyvben [6] találhat az olvasó.

A vízcsepp által szórt elektromágneses tér kiszámításához tipikusan R/λ számú, igen bonyolult tagot tartalmazó sort kell összegezni, ami ráadásul nagyon lassan konvergál. Így a vízcsepp méretének növelésével numerikusan egyre nehezebb pontosan kiszámítani a szórt fény intenzitását. Ez a fő oka, hogy az elmélet gyakorlati alkalmazása csak a számítógépes technika megfelelő fejlődése után vált lehetségessé. Ma már egyszerű személyi számítógéppel is percek alatt kaphatunk eredményeket akár $R/\lambda > 50000$ esetén is [11].

A 10. ábrán összehasonlítottuk az egzakt Mie-, és az Airy-elmélet alapján kapott intenzitás szögfüggését fő- és mellékszivárványra, viszonylag nagyméretű vízcsepp esetén, figyelembe véve a polarizációt is. Látható, hogy az Airy-közelítés nagyon jól egyezik az egzakt eredménnyel, azonban két dolog szembetűnő az ábrán. Egyrészt az egzakt intenzitás-görbe az Airy-közelítésből nyert, sima



10. ábra. Az egzakt Mie- és az Airy-elmélet összehasonlítása főszivárvány ($p=2$) és mellékszivárvány ($p=3$) esetén, polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 0,650 \mu\text{m}$, $n = 1,33$) és $R = 1 \text{ mm}$ sugarú vízcsepre ($R/\lambda \approx 1500$). A két függőleges vonal a Descartes-elméletből számolt $\theta_c(p = 2) = 137,5^\circ$ és $\theta_c(p = 3) = 129,9^\circ$ szórési szögeknek felelnek meg a kétféle szivárványra. A logaritmikusan ábrázolt intenzitást $I_0/(2\pi r/\lambda)^2$ egységekben számoltuk, ahol I_0 a vízcsepre érkező λ hullámhosszú fénynyaláb intenzitása, és r a vízcsepp és a megfigyelő közti távolság.

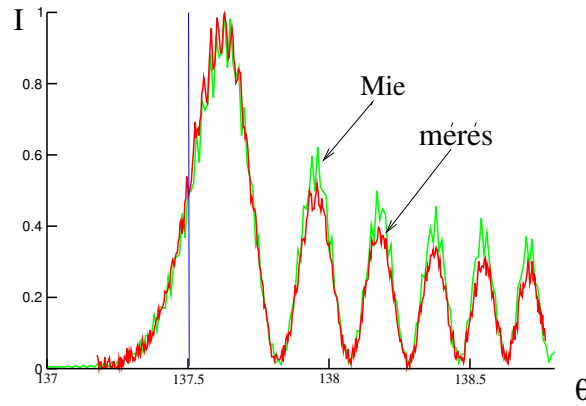
szögfüggést mutató görbe körül gyorsan „oszcillál”. Másrészt pedig az egzakt számítások eredményeképpen kapott intenzitás — ellentétben az Airy-elmélettel — véges (azaz nem zérus) értéket vesz fel az Alexander-féle sötét sávban. Igaz, hogy ez az érték körülbelül öt nagyságrenddel kisebb a főszivárvány első csúcsának intenzitásához képest, és így a gyakorlatban ez a tartomány tényleg sötétnek tekinthető. Megmutatható, hogy az egzakt megoldásban tapasztalható, gyorsan oszcilláló viselkedés a 2a ábrán látható, a vízcsepről közvetlenül visszaverődő ($p = 0$) és a főszivárvány kialakulásában szerepet játszó ($p = 2$) fénysugarak interferenciájának a következménye. Az Alexander-féle sötét sávban megfigyelt véges nagyságú intenzitás is a $p = 0$ fénysugarak szóródásából adódik [8].

Összességében megállapíthatjuk, hogy viszonylag nagy méretű ($R > 1 \text{ mm}$ sugarú) vízcseppek esetében az Airy-elmélet (eltekintve az Alexander-féle sötét sávot) jól írja le a fő- és mellékszivárványt és azok járulékos íveit. A csepp méretének csökkentésével, illetve magasabbrendű szivárványoknál az Airy-elméletből kapott intenzitás fokozatosan eltér az egzakt Mie-elméletből számolt eredményektől.

A 8. ábrán látható mérési elrendezés alkalmas a vízcseppeken bekövetkező fényszórás vizsgálatára is. A kísérleteket Huhn Andrásné végezte el. A mért és a Mie-elméletből kapott intenzitás szögfüggését mutatja a 11. ábra. A két eredmény láthatóan jól egyezik.

A koszorú, mint fényelhajlási jelenség

A koszorút (angolul *corona*) akkor figyelhetjük meg, ha a Nap vagy a Hold vékony felhőrétegen süt át. A koszorúról például a [12] internet címen találunk kitűnő felvételt. A koszorú felléptekor a Nap vagy a Hold körül egy fényes, kör alakú udvart láthatunk, melyet gyakran további színes gyűrűk öveznek. A koszorú a viszonylag kis méretű vízcseppeken ($R < 0,01 \text{ mm}$) vagy más apró szórócentrumokon való kis szögű ($\theta < 10^\circ$) fényszóródás következménye, mikor a Napról (Holdról) érkező fénysugarak a vízcseppen elhajlanak. A Nap körüli koszorút szabad szemmel nem láthatjuk (illetve nem is célszerű megpróbálnunk a szemünk óvása érdekében), mert a Nap közvetlen fénye elnyomja a koszorút. De ha kitakarjuk a koszorú középső részét, vagy ha a jelenségnek egy vízfelületről tükröződő képét nézzük, akkor a gyűrűk már könnyebben megfigyelhetők. A Hold esetében a gyengébb fényerő miatt a koszorú észlelése sokkal egyszerűbb („udvara” van a Holdnak). A jelenség hasonló a fénysugaraknak



11. ábra. A mérési eredmény és az egzakt Mie-elmélet összehasonlítása főszivárvány ($p=2$) esetén, polarizálatlan, vörös színű fényre ($\lambda = 0,650 \mu\text{m}$, $n = 1,33$) és $R = 1,82 \text{ mm}$ sugarú vízcsepre ($R/\lambda = 2800$). A függőleges vonal a Descartes-elméletből számolt, és az 1. táblázatban adott $\theta_c(p = 2) = 137,5^\circ$ szórési szögnek felel meg. A mért és a számolt intenzitást az első csúcs intenzitásának egységében adtuk meg.

kör alakú akadályon történő elhajlásához. Minél kisebb a szóró részecskék mérete, annál nagyobb a koszorú átmérője. Mivel a nagyobb hullámhosszú fény nagyobb szögben hajlik el, ezért a koszorú belső gyűrűje kékes színű, míg kívül barnás, vöröses.

Mivel a koszorú jó közelítéssel egy elhajlási jelenség, ezért a koszorú a szóró részecskék anyagától függetlenül is kialakulhat, és nem szükséges, hogy a szóró részecskék átlátszók legyenek. Szóró részecske lehet például kicsi jégszemcse, pollen, vulkáni porszem vagy más szennyező részecske is. Az egyik legismertebb koszorújelenséget a Krakatau vulkán 1883-as kitörése után lehetett megfigyelni, a sztratoszférába került, és ott több éven át lebegő nagy mennyiségű vulkáni por következtében. A gyűrűk feltűnően nagy méretűek (15°) és különösen színpompásak voltak.

A glória

A glória egy másik ritkán megfigyelhető légköri fényjelenség, amiről számos kitűnő felvétel található az interneten [13]. A fénysugarak vízcseppeken történő szóródásakor a glória körülbelül a $170^\circ < \theta < 180^\circ$ szórési szögtartományban figyelhető meg. A glória akkor tapasztalható, ha a megfigyelő egy magas ponton tartózkodik (például egy hegy tetején) és nézi a saját árnyékát, ami az előtte lévő felhőre vagy ködre vetődik. Ekkor a fejének árnyéka körül egy fényes, esetleg több színes gyűrűt lát. Ha több megfigyelő áll egymás mellett, akkor mindenki csak a saját fejének árnyéka körül látja a glóriát, de a szomszédja feje körül már nem, mivel a glória csak a 180° szórési szög körül alakul ki.

A glóriáról az első feljegyzés a spanyol Antonio de Ulloa kapitánytól származik 1735-ből, aki egy tudományos expedíciót vezetett Peruban az Andok hegységben. Ilyen jelenség megfigyelésénél a vízcseppek átlagos sugara $R = 0,02 \text{ mm}$. A gyűrűk színének sorrendje azonos a koszorúéhoz. Manapság repülőgépen számos olyan fényképfelvétel készült, amelyen a gép árnyéka körüli glória jól kivehető.

A koszorúnál és a glóriánál a fény intenzitásának szögfüggését a Mie-elmélet alapján számíthatjuk ki (például Philip Laven programjával [11]). Numerikus számításokkal e két látványos légköri jelenség további részleteire is fényt deríthetünk [8].

A szivárvány és a kvantummechanika kapcsolata

A szivárvány kapcsolatba hozható a kvantummechanikával. A hasonlóság abból adódik, hogy a szivárványnál a fény terjedését a Maxwell-egyenleteket kielégítő elektromágneses hullámokkal, míg a kvantummechanikában a szórt részecskéket (például elektronokat, atomokat) a *Schrödinger-egyenlet* megoldásaként adódó hullámfüggvénnyel írhatjuk le. A hasonlóság még egyértelműbb, ha a kvantummechanikai szórásproblémát tekintjük, azaz mikor a részecskének atomokon vagy más szórócentrumokon történő szóródását vizsgáljuk. Az alapvető feladat a szórt hullámfüggvény, illetve a szórt intenzitás szögfüggésének meghatározása. Megmutatható, hogy a szórócentrumok egy bizonyos osztályán belül ugyanazok az egyenletek írják le a kvantummechanikai szórásproblémát, mint a vízcseppeken való fényszórást [8].

Általában a kvantummechanikai szórásprobléma a fényszóráshoz hasonlóan rendkívül bonyolult feladat, és közelítésekre van szükség. Bizonyos közelítésekkel a kvantummechanikai szórás megfelel a klasszikus szórásnak, azaz mikor a részecskéket klasszikusnak tekinthetjük. A fényszóráshoz hasonlóan ekkor is felléphet a szórócentrumtól függően egy kritikus θ_c szórási szög, amelynél nagyobb (esetleg kisebb) szögben nincs szórt részecske. Ez a klasszikus közelítés tehát a fényszórásnál a Descartes-elméletnek felel meg. Valamivel pontosabb közelítés érhető el, amikor a szórási szög csak néhány fokot tér el a θ_c szögtől. A szivárványnál ismertetett Airy-elméletben alkalmazott közelítések a kvantummechanikai szórásproblémánál is használhatók, és emiatt ezt a közelítést gyakran *szivárványszórásnak* is nevezik. Végezetül megemlítjük, hogy az optikai esetben ismert koszorú és glória jelenségekhez hasonlóan a kvantummechanikában is létezik ez a szórástípus, amit *glóriaszórásnak* neveznek [8].

Utószó

A valóságban megfigyelhető szivárvány létrejöttében több olyan tényező is szerepet játszhat, amelyekkel a cikkünkben tárgyalt elméletek egyike sem számol. Ilyen például az, hogy a Nap nem pontszerű fényforrás, a látószöge kb. $0,5^\circ$, a vízcseppek mérete pedig különböző, és alakjuk is eltérhet a gömbtől, márpedig a vízcseppek mérete és alakja összetett módon befolyásolja a szivárvány színeinek erősségét és íveinek alakját. A nagy és ellapult vízcseppek okozta szivárványt annak fő ívének alján látjuk fényesebbnek, míg a szivárvány tetejéről jövő fénysugarak a kicsi, gömb alakú vízcseppeken való szóródásból származnak. Figyelembe kellene venni a napsugárzás intenzitásának hullámhosszfüggését is. A zavaró tényezők legtöbbjét csak laboratóriumi körülmények között lehet kiküszöbölni.

Mint láttuk, Arisztotelész óta több neves fizikus tanulmányozta az egyik legismertebb és legszebb légköri tüneményt, a szivárványt. A vele kapcsolatos jelenségek egzakt tárgyalása nem nélkülözheti mindazt a tudást, ami a fényről halmozódott föl. Az optika fejlődésében mindig nagy szerepet játszottak az újabb elméletek alkalmazásai a szivárvány leírásában. De fordítva is igaz, a szivárvány pontosabb értelmezése is hatással volt az optika fejlődésére. Végül megemlítjük, hogy a szivárvány szórási problémaként való kezelése során eredményesen használt vagy továbbfejlesztett számítási eljárásokat nem csak egzotikus tüneményekre alkalmazzák. Legfontosabbnak látszó két alkalmazási területen felmerülő feladatként kiemeljük a hadászatban a helymeghatározást és az azonosítást, illetve az orvosi diagnosztikában, például a CT-nél (számítógépes tomográfia) a szóródás által megzavart árnyékok kiértékelését.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetünket fejezzük ki *Dávid Gyulának, Geszti Tamásnak, Horváth Gábornak, Tichy Gézának* és

Weidinger Tamásnak a kézirat olvasása után javasolt hasznos tanácsaikért. Hálásak vagyunk Philip Lavennek a levelezésünk nyomán nyújtott segítségéért.

Irodalom:

- [1] <http://www.atoptics.co.uk/>
<http://my.unidata.ucar.edu/content/staff/blynds/rnbw.html>
http://www.usna.edu/Users/oceano/raylee/RainbowBridge/Chapter_8.html
<http://hjem.get2net.dk/Hemmingsen/Rainbow/>
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Rainbow/rainbow.html>
- [2] <http://www.sundog.clara.co.uk/rainbows/supers.htm>
- [3] Mészáros Ernő (2006): Az arab tudomány öröksége, *História* **3.**, 26.
- [4] Honyek Gyula (1991): A szivárvány. *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* **1** (január), 33-37.
- [5] Czelnai Rudolf (1979): *Bevezetés a meteorológiába I. Légekörtani alapismeretek*, Egyetemi jegyzet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Tankönyvkiadó, Budapest.
- [6] Bencze Pál, Major György és Mészáros Ernő (1982): *Fizikai Meteorológia* (szerk.: Mészáros Ernő), Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [7] László István (1979): A részecskék sugárzás-szórásának fizikai törvényszerűségei. *Meteorológiai Tanulmányok* **33**, 1-27.
- [8] Cserti József (2005): A szivárvány fizikája, az esőcseppek fény szórási jelenségei. *Fizikai Szemle* **9.**, **10.** és **12.** számok, 297-302, 349-355, 422-427.
- <http://www.kfki.hu/fszemle>
<http://complex.elte.hu/~cserti> --> Education --> Szivarvany.pdf
- [9] A. Barta, G. Horváth, B. Bernáth, V. B. Meyer-Rochow (2003): Imaging polarimetry of the rainbow. *Applied Optics* **42**, 399-405.
- [10] G. Horváth and D. Varjú (2003): Polarized Light in Animal Vision — Polarization Patterns in Nature. *Springer-Verlag, Heidelberg - Berlin - New York*.
- [11] A szivárványról és más kapcsolódó témáról sok képpel illusztrált összefoglaló, és a többféle közelítő, illetve egzakt megoldásra kidolgozott, ingyenesen letölthető program található a
- <http://www.philiplaven.com/mieplot.htm>
- internetcímen.
- [12] <http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/corona.htm>
- [13] <http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/glory.htm>
<http://www.sundog.clara.co.uk/droplets/gloim1.htm>