Cserti József

ELTE TTK

Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Fermat-elv, avagy a fénysugarak terjedésének univerzális törvénye a geometriai optikában

Atomoktól a csillagokig előadássorozat középiskolásoknak
ELTE Természettudományi Kar, Fizikai Intézet, 2015. szeptember 24., Budapest

Pierre de Fermat

1601 - 1665

francia jogász és műkedvelő matematikus

Munkássága:

Analízis (differenciál és integrálszámítás)

Kombinatorika

Valószínűségszámítás (Pascallal együtt)

Analitikus geometria (kúpszeletek egyenlete)

Számelmélet

Fermat-elv (az első variációs elv, optikai alkalmazás)

Nagy Fermat-tétel (sejtés, 1637)

„Lehetetlen egy köbszámot felírni két köbszám összegeként, vagy egy negyedik hatványt felírni két negyedik hatvány összegeként, általában lehetetlen bármely magasabb hatványt felírni két ugyanolyan hatvány összegeként. Igazán csodálatos bizonyítást találtam erre a tételre. A margó azonban túlságosan keskeny, semhogy ideírhatnám.”

Pontosabban: $$x^n + y^n = z^n$$

egyenletnek nincs megoldása a nemnulla egész számok körében *n > 2* természetes szám esetén.

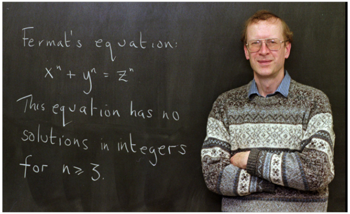
Megjegyzések: n = 2-re az egyenlet megoldásai a pitagoraszi számhármasok.

x	y	z
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
	......	

n = 4 esetre Fermat bizonyítását később megtalálták,
n = 3 esetre Euler bizonyította.
Számítógéppel 4 milliónál kisebb prímekre.

Végül 1995-ben (358 évvel később!!!)
Andrew Wiles bizonyította be a tételt.

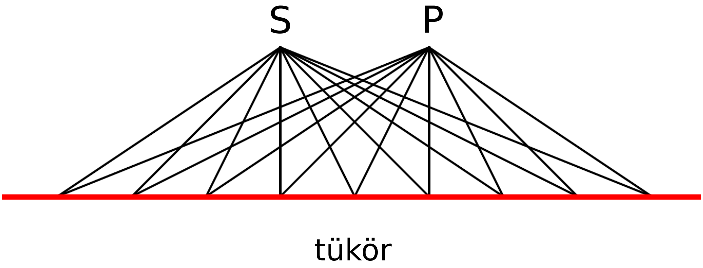
Sir Andrew John Wiles (1953. április 11.)
az Amerikai Egyesült Államokban élő angol matematikus.



Kis Fermat-tétel: tetszőleges *a* egész számra és *p* prímszámra

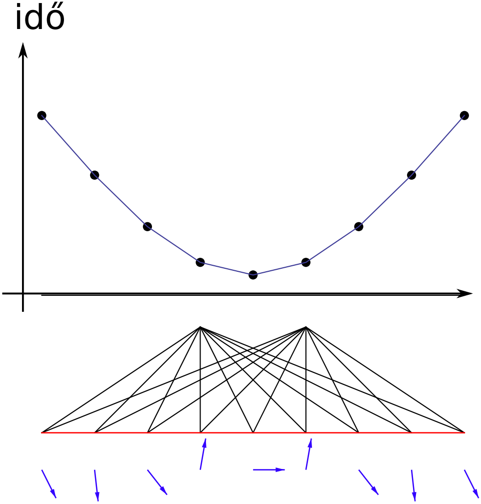
$$a^p - a$$ osztható *p*-vel

Hogyan terjed a fény?

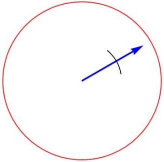


Feynman-féle pályaösszegzés

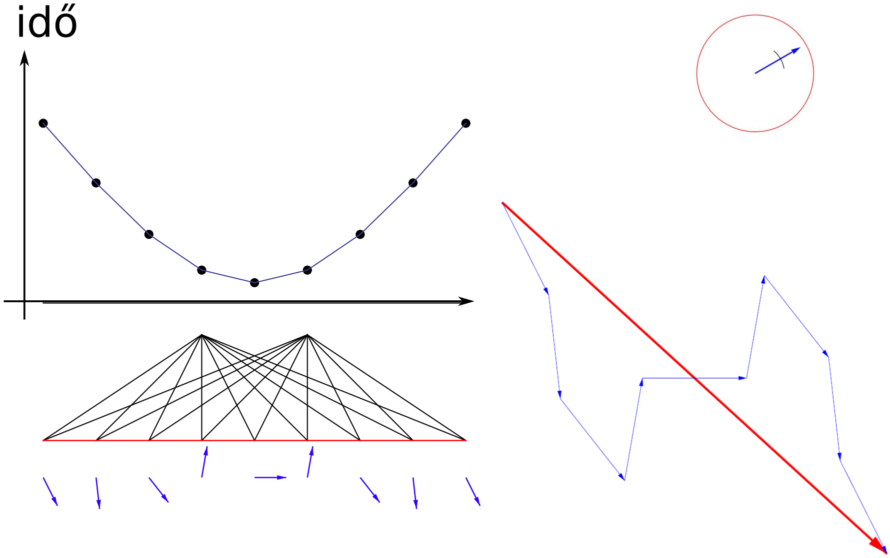
(path integral)

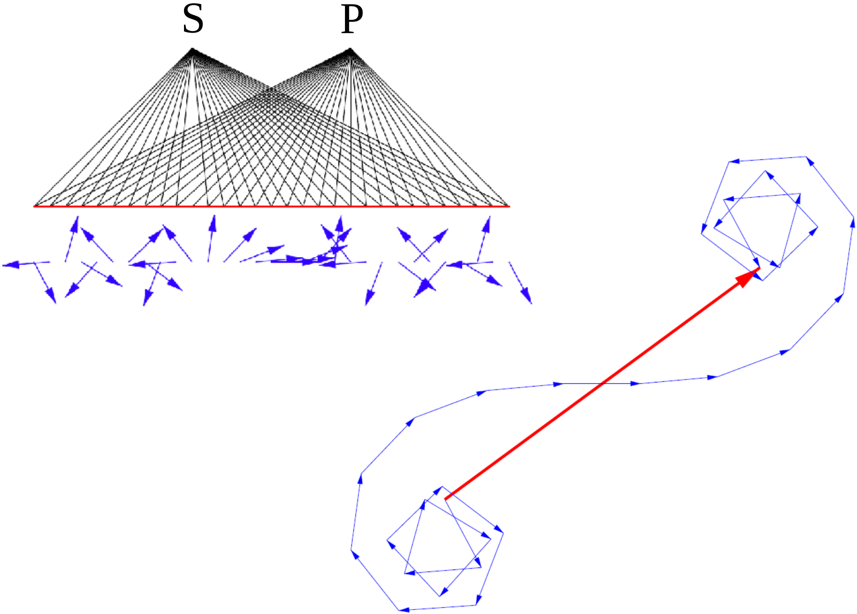


Richard Phillips **Feynman**
(1918-1988)

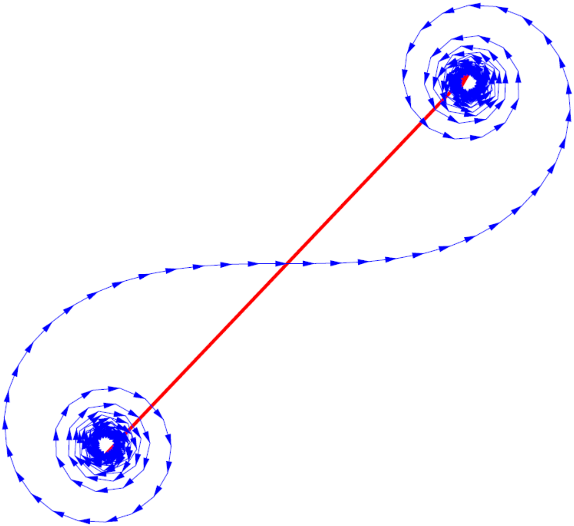


Feynman-féle pályaösszegzés

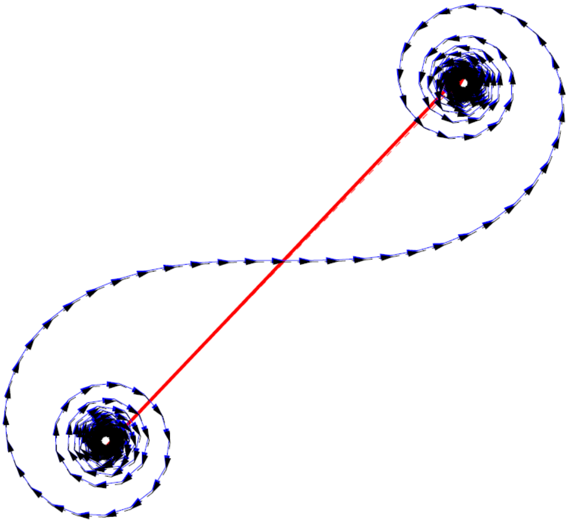


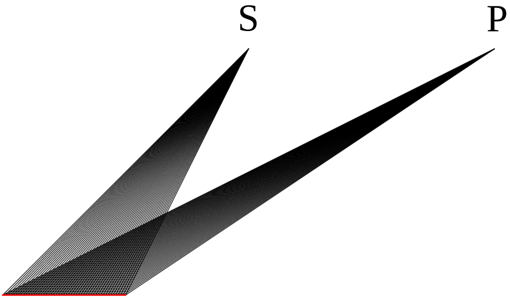

S
P

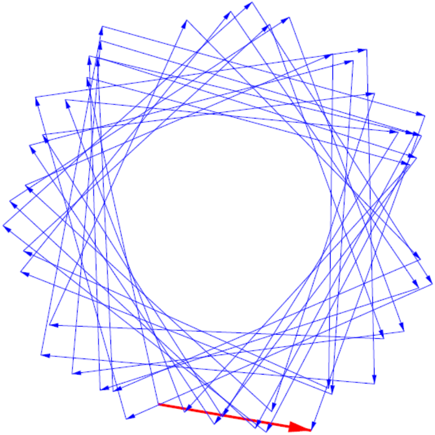
Még több pálya hatása



Az eredő amplitúdó nagysága **alig változik**, ha a tükörnek egyre nagyobb részét vesszük figyelembe

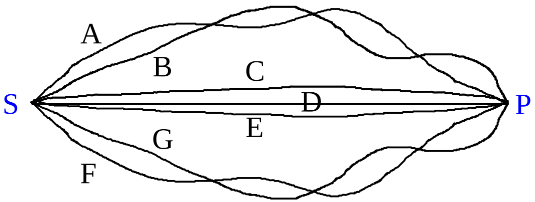


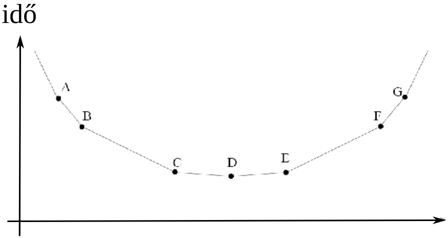




A tükörnek a „rossz” részét vesszük.

Miért terjed a fénysugár egyenes vonalban?





Homogén közegben igaz a fénysugár megfordíthatóságának elve.

Fermat-elv

(1657)

Fény sebessége közegben: $$\boxed{c = \frac{c_0}{n}}$$

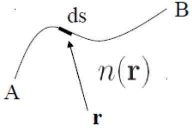
a fény sebessége vákuumban

a közeg törésmutatója
(az anyagtól, a fény színétől,
és a helytől is függhet)

A fénysugár azt a pályát választja, amelyet a **legrövidebb idő** alatt tesz meg.
Nem a legrövidebb út, hanem a **legrövidebb idő** számít!

$$\int_A^B \frac{ds}{\frac{c_0}{n}} = \text{szélsőérték}$$

(átalában minimum)



Fermat-elv: $$\boxed{\int_A^B n(\mathbf{r})\, ds = \text{szélsőérték}}$$

Mi van a tik-tak órás „mese” mögött?

A fény a sok szomszédos, közel azonos időt igénylő pályák közül választ.

De hogyan választja ki a legrövidebb idejű pályát?
Hogyan dönti el, hogy melyik a legrövidebb idejű pálya?
„Végigszimatolja” a közel azonos pályákat és összehasonlítja őket egymással?

Válasz: **igen**. Mindez a fény hullámtermészetének köszönhető.

A tik-tak óra fordulatszáma éppen a fény frekvenciája.

A valódi pálya és a közeli, szomszédos pálya mentén terjedő fénysugarak,
pontosabban hullámok közel azonos fázisban
érkeznek a detektorhoz: **erősítő interferencia**.

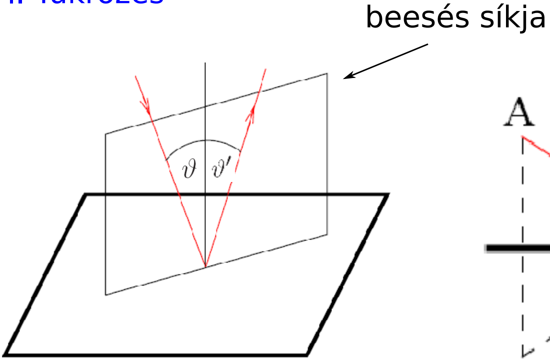
Az egymáshoz képest „távoli” (a fény hullámhosszánál nagyobb)
pályák mentén haladó hullámok fázisa szinte véletlenszerű,
a hullámok **kioltják** egymást.

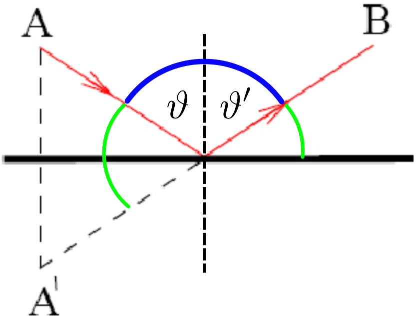
A fény hullámtermészetéből adódóan úgy látszik, mintha a hullámhosznál
jóval nagyobb „akadályok” között a fény a Fermat-elv szerint terjedne.

A jelenség pontos leírása csak a kvantumelektrodinamika alapján lehetséges.

Fénysugarak terjedésének alapja a geometriai optikában

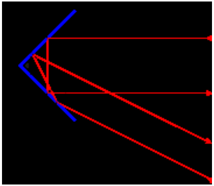
I. Tükrözés





$$\boxed{\vartheta = \vartheta'}$$

saroktükör (macskaszem)

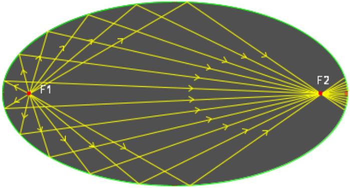


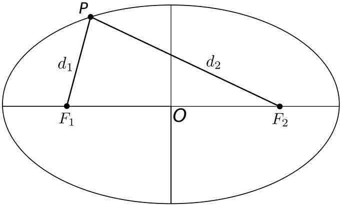
A Holdra is tettek már saroktükröt!

visszaveri a radarhullámokat

Elliptikus tükör:

egy pontból kisugárzott fénysugarakat egy másik pontba gyűjti





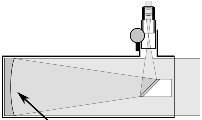
http://www.edmundoptics.com/

$$d_1 + d_2 = \text{állandó}$$

Összhangban a Fermat-elvvel.

Tükörös teleszkópok, antennák

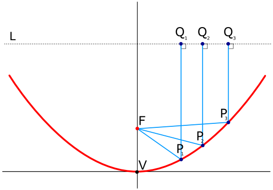
Newton-távcső



Egy modern verzió: **Hubble-űrteleszkóp**
(légköri mozgások, légkör áteresztőképessége nem zavarja)

Parabola tükör, antenna

A parabola tükör a párhuzamosan bejövő fénysugarakat a fókuszpontba gyűjti.



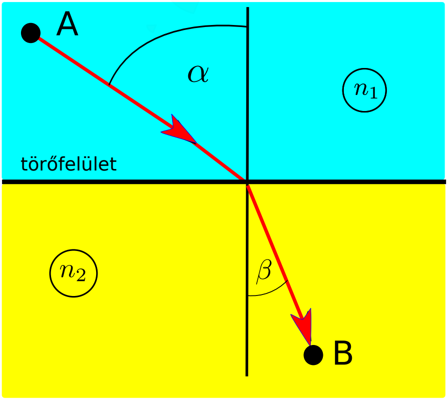
$$\overline{Q_i P_i} + \overline{P_i F} = \text{állandó}$$

Összhangban a Fermat-elvvel.

Saját fénykép (Lake District, UK)

Fénysugarak terjedésének alapja a geometriai optikában

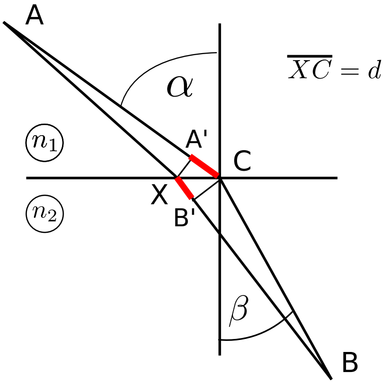
II. A fénysugarak törése
Snellius-Descartes-törvény levezetése a Fermat-elvből:

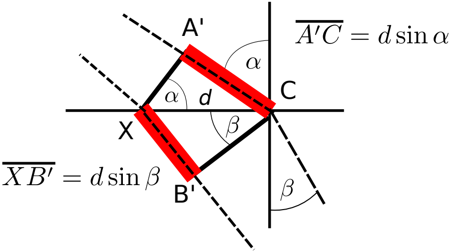


A-ból B-be a fény terjedésének ideje: minimális

Fénytörés közeg határán

A-ból a B-be a legrövidebb (minimális) idő alatt kell eljutni.
Tegyük fel, hogy ez a pálya az ACB tört vonal.
Ettől a pályától kissé eltérő AXB pályán a fény közel azonos ideig halad.





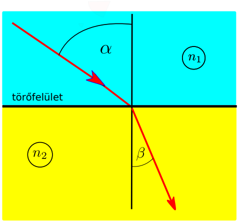
$$\frac{\overline{A'C}}{\frac{c_0}{n_1}} = \frac{\overline{XB'}}{\frac{c_0}{n_2}}$$

Azonos idők

$$\boxed{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}$$

Snellius-Descartes-törvény

Willebrord Snellius
(Willebrord Snel van Royen)
Leiden (1580- 1626)

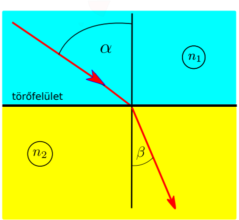


René Descartes
Franciaország (1596 – 1650)

Sok tankönyvben: $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

Snellius-Descartes-törvény

Willebrord Snellius
(Willebrord Snel van Royen)
Leiden (1580- 1626)

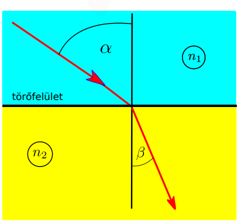


René Descartes
Franciaország (1596 – 1650)

Sok tankönyvben: $$\xcancel{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Snellius-Descartes-törvény

Willebrord Snellius
(Willebrord Snel van Royen)
Leiden (1580- 1626)



René Descartes
Franciaország (1596 – 1650)

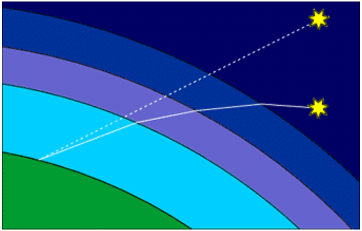
$$\cancel{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}}$$

$$\boxed{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}$$

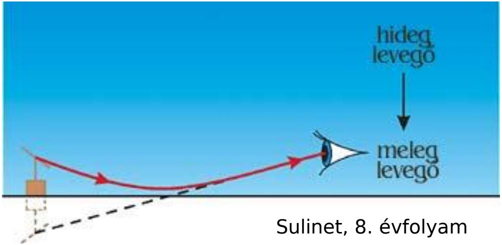
$$\boxed{n \sin\alpha = \text{állandó}}$$

fénytörés

csillagok látszólagos helye



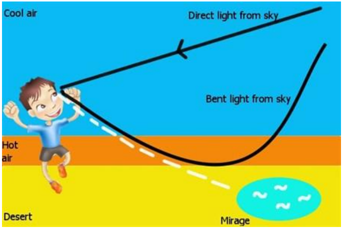
Délibáb



Sulinet, 8. évfolyam

A forró úttest közelében kisebb a törésmutató,
mint távolabb. A törésmutató nő a magassággal.

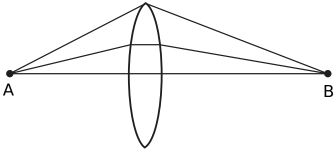
Felhők tükröződése



Ha a törésmutató lineárisan növekszik
a magassággal, akkor a fénysugár pályája
láncgörbe.

Lencsék

Gyűjtőlencse: a lencsén keresztül az A pontból induló összes fénysugár a B pontba jut. A lencse alakját úgy tervezik, hogy minden pályára a terjedési idő azonos legyen.

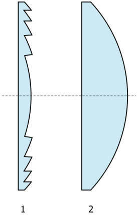


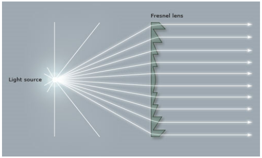
A Fermat-elvből levezethető a jól ismert lencse-törvény:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

Fresnel-lencse: „lapos” lencse, a megfelelően kimetszett lencsedarabkák a bejövő párhuzamos sugarakat egy pontba gyűjtik össze (Augustin Jean Fresnel francia fizikus, 1818 körül eredetileg világítótornyok számára fejlesztette ki).

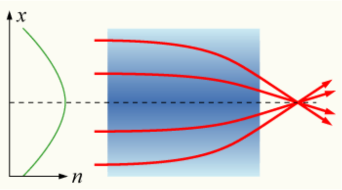
Augustin-Jean **Fresnel**
(1788 - 1827)





Változó törésmutatójú anyagok

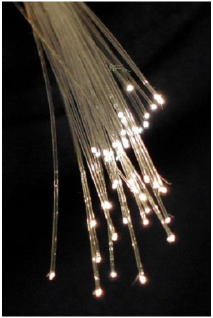
Gradient-index (GRIN) optics



A törésmutató parabolikusan változik
a sugár függvényében (x).

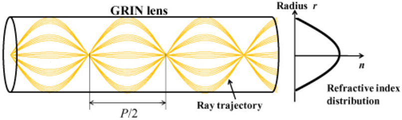
A fénysugarak pályáját a Fermat-elvből
számolhatjuk ki.

optikai szálak



A „lapos” lencse tökéletesen fókuszál,
nincsenek lencsehibák.

Optikai szálak készítése.
Könnyen hozzátehetünk további lencséket.



Egy bolygón körbefutó fénysugár

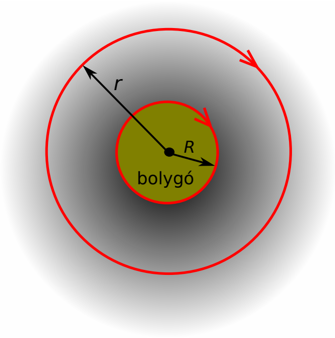
Gnädig Péter, Honyek Gyula, Vigh Máté: *333 furfangos feladat fizikából* (Typotex Kiadó, 2014)

F. 201. Egy gömb alakú bolygón a légkör törésmutatója a felszíntől mért *h* magasság függvényében az

$$n(h) = \frac{n_0}{1+\varepsilon h}$$

összefüggés szerint változik, ahol n_0 és ε állandók. A bolygó különlegessége, hogy a tetszőleges magasságban vízszintesen elindított lézersugár mindig „körbeszalad” a bolygón. Mekkora a bolygó sugara?

(megoldás: **M. 201**)



$$\frac{2\pi R}{\frac{c_0}{n_0}} = \frac{2\pi r}{\frac{c_0}{n(r)}}$$

azonos idők

$$n(r) = n_0 \frac{R}{r} \sim \frac{\textit{állandó}}{r}$$

A törésmutató *1/r* szerint csökken a bolygótól távolodva.

Hullámoptika

James Clerk
Maxwell
(1831–1879)

$\boxed{\textbf{Hullámoptika}}$

Maxwell-egyenletek

Hullámoptika határesete: geometriai optika

James Clerk **Maxwell** (1831–1879)

Hullámoptika

Maxwell-egyenletek

közelítés $\lambda \to 0$

Geometriai optika

Fermat-elv

Pierre de **Fermat** (1601–1665)

Analógia az optika és a mechanika között

James Clerk
Maxwell
(1831–1879)

Hullámoptika

Maxwell-egyenletek

közelítés
$\lambda \to 0$

Geometriai optika

Fermat-elv

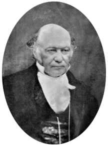
$\longleftrightarrow$

analógia

Mechanika

Hamilton-elv

Pierre de **Fermat**
(1601–1665)



William Rowan
Hamilton
(1805–1865)

Mi a hullámoptika analógja?

James Clerk **Maxwell** (1831–1879)

Hullámoptika ⟷ analógia ⟷ **??????????????**

Maxwell-egyenletek

közelítés $\lambda \to 0$

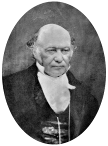
↓

Geometriai optika ⟷ analógia ⟷ **Mechanika**

Fermat-elv

Hamilton-elv

Pierre de **Fermat** (1601–1665)



William Rowan **Hamilton** (1805–1865)

A hullámoptika analógja a kvantummechanika

James Clerk **Maxwell** (1831–1879)

Hullámoptika

Maxwell-egyenletek

$\longleftrightarrow$ analógia

Kvantummechanika

Schrödinger-egyenlet

Erwin Rudolf Josef Alexander **Schrödinger** (1887–1961)

közelítés $\lambda \to 0$ $\downarrow$

közelítés $h \to 0$ $\downarrow$

Pierre de **Fermat** (1601–1665)

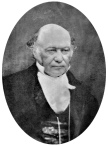
Geometriai optika

Fermat-elv

$\longleftrightarrow$ analógia

Mechanika

Hamilton-elv



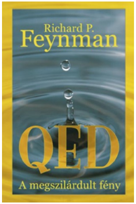
William Rowan **Hamilton** (1805–1865)

Irodalom

Richard P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands:
Mai fizika III. (Optika. Anyaghullámok)
(Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985)

Richard P. Feynman: *QED A megszilárdult fény*
(Scolar Kiadó, 2007)

Gnädig Péter, Honyek Gyula, Vigh Máté:
333 furfangos feladat fizikából
(Typotex Kiadó, 2014)



ELTE TTK
Fizikai Intézet

www.atomcsill.elte.hu

International
Year of Light
2015

2015 A fény nemzetközi éve

Köszönetnyilvánítás

Dávid Gyula
Vigh Máté