A játékelmélet kölcsönhatásainak anatómiája

Szabó György

MTA EK MFA
Honlap: http://www.energia.mta.hu/~szabo/
H-1525 Budapest, POB. 49, Hungary
Atomoktól a csillagokig, ELTE, Budapest, 2017. 01. 26.

Kivonat

- Evolúciós játékelmélet és a fizika kapcsolata
- Párkölcsönhatás és mátrixok
- Koordinátarendszer elforgatása (új bázisvektorok és bázismátrixok)
- kettő-, három-, és *n*-stratégiás játékok komponensekre bontása
- Összegzés: a négy elemi játék tulajdonságai

Javasolt irodalom (honlapról letölthető): Phys. Rep. 624 (2016) 1-60,
PRE 92 (2015) 022820
PRE 95 (2017) 012320

Társak: Borsos István, Király Balázs, Bodó Kinga, Hódsági Kristóf, Bunth Gergely, ….

Kétstratégiás evolúciós játékelméleti modellek

A játékosok egy négyzetrács *x* pontjain vannak (periodikus határfeltétel, $N=L\times L\to\infty$)

Az ekvivalens játékosok a két lehetséges stratégia valamelyikét használják, azaz

$$\mathrm{s_x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \text{vagy} \quad = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \text{és a teljes rendszer állapota:} \quad \mathrm{S} = (\mathrm{s_1}, \cdots, \mathrm{s_N})$$

Játékelméleti modellek		**Fizikai modellek**
Játékos:	baktérium (mutáns vagy nem mutáns)	kristályfelület: atom vagy üres
	élőlény (ragadozó vagy zsákmány)	spin: ↑ vagy ↓
	ember (tisztességes vagy élősködő)	fémhidrogén: H vagy üres

Az *x* játékos haszna (vagy a fizikai rendszer energiája) $\mathrm{s_x}$-től és a szomszédoktól függ:

$$U_x = \sum_{\delta=1}^{4} s_x \cdot \mathbf{A} s_{x+\delta}\,, \qquad \text{ahol} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix}\mathrm{a} & \mathrm{b}\\ \mathrm{c} & \mathrm{d}\end{pmatrix} \quad \text{a nyereménymátrix.}$$

A potenciáljátékoknál létezik egy *V*(S) potenciál, aminek változása az $\mathrm{s_x}\to\mathrm{s'_x}$ stratégiaváltásnál megegyezik az *x* játékos nyereményének változásával, azaz

$$\widetilde{\mathrm{V}}(\mathrm{S}') - \widetilde{\mathrm{V}}(\mathrm{S}) = \sum_{\delta=1}^{4} \mathrm{s}'_{\mathrm{x}} \cdot \mathrm{A}\mathrm{s}_{\mathrm{x}+\delta} - \sum_{\delta=1}^{4} \mathrm{s}_{\mathrm{x}} \cdot \mathrm{A}\mathrm{s}_{\mathrm{x}+\delta}$$

Kétstratégiás evolúciós játékelméleti modell (folytatás)

Ha a nyereménymátrix szimmetrikus (b=c vagy **A**=**A**^{T}), akkor

$$\tilde{V}(S) = \frac{1}{2}\sum_{x,\delta} s_x \cdot V s_{x+\delta}\,,$$ ahol a párkölcsönhatás potenciálmátrixa: **V**=**A**

A **V** potenciálmátrix és ezzel együtt a teljes rendszer potenciálja azonban akkor is létezhet, ha **A**≠**A**^{T}. Ezen potenciáljátékoknál a rendszer a maximális potenciál értékét egy olyan kitűntetett Nash-egyensúlyi állapotban éri el, ami megfelel a fizikai rendszerek alapállapotának.

Ha a potenciáljátékoknál az evolúciós folyamatot egy olyan (logit) folyamat sorozata szabályozza, aminél a véletlenül választott *x* játékos a stratégiáját s_x-ről s'_x-re változtatja

$$w(s_x \to s'_x) = \frac{\exp[u_x(s'_x)/K]}{\sum_{s''_x}\exp[u_x(s''_x)/K]}$$ valószínűséggel (*K* a zaj erőssége)

akkor a rendszer a Boltzmann-eloszlásba fejlődik, azaz az S állapot valószínűsége:

$$p(S) = \frac{1}{Z}\exp(\tilde{V}(S)/K)\,, \text{ ahol } Z = \sum_{S}\exp(\tilde{V}(S)/K)$$

Például: sim1 sim2

sim3

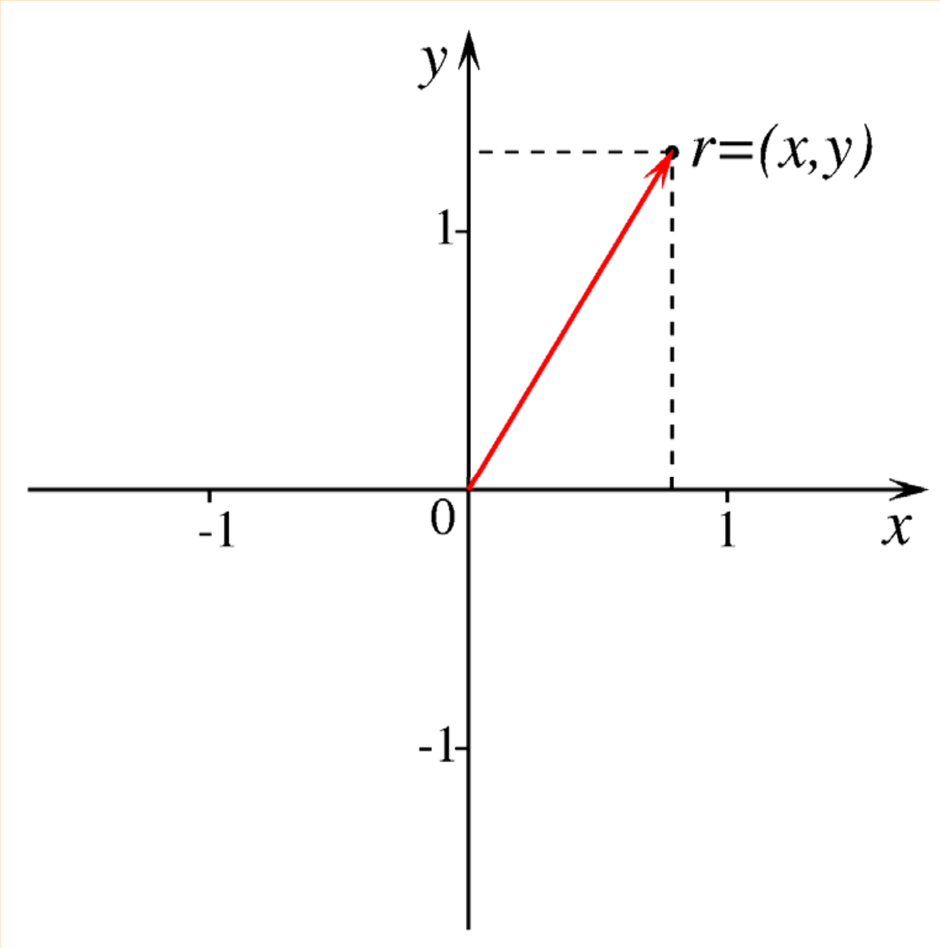
sim5 sim6

Következmény: termodinamikai viselkedés

Koordinátarendszer

Példa: kétdimenziós vektor tér

Az $\boldsymbol{r}$=(x,y) vektor grafikus megjelenítése



Az $\boldsymbol{r}$=(x,y) vektort felíthatjuk ortogonális bázisvektorok összegeként:

$$r = x\, e_x + y\, e_y = x\,(1{,}0) + y\,(0{,}1)$$

$$\text{ahol} \quad e_x = (1{,}0) \quad \text{és} \quad e_y = (0{,}1)$$

Skalárszorzat(ok):

$$r \cdot e_x = (x{,}y) \cdot (1{,}0) = x,$$

$$r \cdot e_y = (x{,}y) \cdot (0{,}1) = y,$$

$$e_x \cdot e_y = (1{,}0) \cdot (0{,}1) = 0,$$

$$e_x \cdot e_x = (1{,}0) \cdot (1{,}0) = 1, \quad \text{és}$$

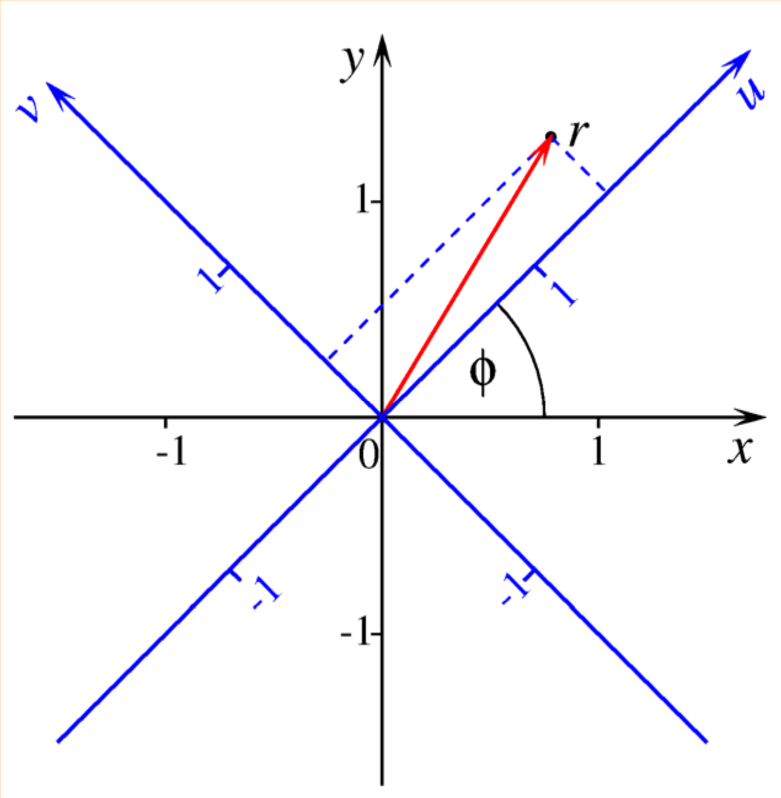
$$e_y \cdot e_y = (0{,}1) \cdot (0{,}1) = 1$$

Koordináta rendszer elforgatása Φ szöggel

Az új bázisvektorok:

$$e_u = (\cos\Phi, \sin\Phi) \quad \text{és} \quad e_v = (-\sin\Phi, \cos\Phi)$$

amiben $\quad r = u\, e_u + v\, e_v$



Az *u* és *v* komponensek értékét skalárszorzatok definiálják:

$$u = r \cdot e_u = (x,y) \cdot (\cos\Phi, \sin\Phi) \quad \text{és}$$

$$v = r \cdot e_v = (x,y) \cdot (-\sin\Phi, \cos\Phi) = y,$$

$$e_u \cdot e_v = 0,$$

$$e_u \cdot e_u = \cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1, \quad \text{és}$$

$$e_v \cdot e_v = \cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1$$

A bázisvektorok és együtthatóik jelentése, ha $\phi = 45^o$

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \quad \text{és} \quad e_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \quad \text{ill.} \quad r = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$$

A számpár helyett azok átlagát és különbségét használjuk a jellemzésben.

Kétstratégiás játék elemi összetevői

A kölcsönhatást az **A** mátrix írja le, ami összetevőkre bontható. Például

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egy másik lehetőség (koordinátarendszer elforgatása a négydimenziós paramétertérben):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+b+c+d}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a+b-c-d}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{a-b+c-d}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{a-b-c+d}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ezek az ortogonális elemi mátrixok (játékok) diadikus szorzatként is értelmezhetők:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ahol a két elemi vektor ortogonális egymásra, mert $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

A második és harmadik komponenst helyettesíthetjük az alábbi két elemi játékkal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right], \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

Az új ortogonális bázisvektorok (bázismátrixok) mellett a megfelelő együtthatók értéke:

$$A = \sum_p \alpha_p f^{(p)} \quad \text{ahol} \quad \alpha_p = \frac{A \cdot f^{(p)}}{f^{(p)} \cdot f^{(p)}} \quad \text{és} \quad A \cdot B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$$

A bázismátrixok által definiált elemi játékok:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Konstans járulék (irreleváns tag) **V**=0

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Koordinációs játék **V**=**A**

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Játék, amikor nyereményünk csak önmagunktól függ **V**=**A**+**A**^{T}

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Játék, amikor nyereményünk csak a másiktól függ **V**=0

Igazi kölcsönhatást csak a koordinációs játék képvisel.

Ez viszont lehet vonzó (kordinációs játék) vagy taszító (anti-koordinációs játék) jellegű

Következmény: a 2×2-es játékok potenciáljátékok és leképezhetőek az Ising-modellre

Sokrészecskés fizikai modellek = részhalmaz az evolúciós játékelméletben

Hasonló módon bontható komponensek (elemi játékok) összegére minden szimmetrikus *n*-stratégiás mátrixjáték,

n stratégia esetében

$$A = \sum_p \gamma_p f^{(p)} \quad \text{ahol} \quad p = 1, \ldots, n^2$$

Kérdés: Hogyan válasszunk „hasznos" elemi játékokat, azaz egy ortogonális

(vagy nem-ortogonális, de teljes) bázis mátrix halmazt?

Cél: Láthatóvá tenni a jellegében azonos illetve különböző kölcsönhatásokat

Lehetőségek: - Fourier komponensekre bontás

- diadikus szorzatra bontás
- egyéb diszkrét sorfejtések
- szimmetriák megjelenítése (akár az ortogonalitás feladásával)

A szimmetrikus 3x3-as (nxn-es) mátrixjátékok egy lehetséges ortonormált bázisa:

$$f^{(k,l)} = e^{(k)} \otimes e^{(l)} \quad \text{ahol a diadikus szorzat:} \quad f = c \otimes d \quad \text{és} \quad f_{ij} = c_i d_j$$

$p=(k,l)$, és $k,l=1, \ldots, n$

$\mathbf{e}^{(k)}$ lehet a hagyományos Cartesian koordinátarendszer k-dik bázisvektora, azaz

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ekkor } f^{(1,1)} = e^{(1)} \otimes e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n=3-nál egy célszerű választás:

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ekkor } f^{(1,1)} = e^{(1)} \otimes e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f^{(1,2)} = e^{(1)} \otimes e^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{k,l} = \frac{A \cdot f^{(k,l)}}{f^{(k,l)} \cdot f^{(k,l)}} \qquad \ldots$$

Tipikus kölcsönhatások a 3x3-as mátrixjátékoknál:

0) **Irreleváns tag** („átlagnyeremény”): potenciál: **V**=0

$$A^{(av)} = a^{(av)} f^{(1,1)}, \quad f^{(1,1)} = e^{(1)} \otimes e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad a^{(av)} = \gamma_{1,1} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} A_{ij}$$

1) **Játék társfüggő nyereménnyel**: $\mathbf{V}^{(cr)} = 0$

$$A^{(cr)} = \gamma_{1,1} f^{(1,1)} + \gamma_{1,2} f^{(1,2)} + \gamma_{1,3} f^{(1,3)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

2) **Játék önfüggő nyereménnyel.** A potenciál: $\mathbf{V}^{(self)} = \mathbf{A}^{(self)} + \mathbf{A}^{(self)T}$

$$A^{(self)} = \gamma_{1,1} f^{(1,1)} + \gamma_{2,1} f^{(2,1)} + \gamma_{3,1} f^{(3,1)} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

Nincs igazi párkölcsönhatás, ugyanakkor mindegyik potenciáljáték.
$\mathbf{A}^{(av)}$ része $\mathbf{A}^{(cr)}$ -nek és $\mathbf{A}^{(self)}$ -nek is. Emiatt ezek együtt egy 5-dimenziós alteret alkotnak

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \text{ de } \quad \sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i$$

Tipikus kölcsönhatások a 3x3-as mátrixjátékoknál (folytatás)

A maradék bázismátrixok diadikus alakja: $f^{(k,l)} = e^{(k)} \otimes e^{(l)}, \quad k, l > 1$

mindegyiknek idetartozik a transzponáltja is $f^{(l,k)} = e^{(l)} \otimes e^{(k)}$

Ezen párokból képezhetünk **szimmetrikus**: $\frac{1}{2}\left[e^{(k)} \otimes e^{(l)} + e^{(l)} \otimes e^{(k)}\right]$

és **antiszimmetrikus** bázismátrixokat: $\frac{1}{2}\left[e^{(k)} \otimes e^{(l)} - e^{(l)} \otimes e^{(k)}\right]$

3) A **szimmetrikus összetevők** alkotják a **koordinációs játékok**at

$$A^{(coor)} = \gamma_{2,2} f^{(2,2)} + \gamma_{3,3} f^{(3,3)} + \frac{1}{2}(\gamma_{2,3} + \gamma_{2,3})[f^{(2,3)} + f^{(3,2)}]$$

$$= \delta_{1,2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_{1,3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta_{2,3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,2} + \delta_{1,3} & -\delta_{1,2} & -\delta_{1,3} \\ -\delta_{1,2} & \delta_{1,2} + \delta_{2,3} & -\delta_{2,3} \\ -\delta_{1,3} & -\delta_{2,3} & \delta_{1,3} + \delta_{2,3} \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok: a mátrix szimmetrikus, a potenciál: $\mathbf{V}^{(coor)} = \mathbf{A}^{(coor)}$

a mátrix minden sorában és oszlopában az elemek összege nulla

(ez biztosítja az ortogonalitást az ön- és társfüggő komponensekre)

elemi komponens = koordinációs kölcsönhatás egy stratégiapár között

3 stratégiapár, ill. 3 ilyen **elemi koordinációs játék** létezik

A szimmetrikus nyereménymátrix következményei

Ekkor **A**=**A**^{T}

de minden mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére:

$$A = A^{(s)} + A^{(as)} = \frac{1}{2}\left(A + A^{T}\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^{T}\right)$$

Következmények:

A két játékos nyereménye azonos => egyéni érdek = közösségi érdek

nincs társadalmi dilemma

V=A

ha max(V_{ij})=$A_{i^*j^*}$, akkor az (i^*,j^*) stratégiapár egy kitűntetett Nash egyensúly,

ami azonos a fizikai rendszerek alapállapotával

ha $i^*=j^*$, akkor mindenki az i^* stratégiát választja => homogén (rendezett) alapállapot

ha $i^* \neq j^*$, akkor két ekvivalens alrácsrendezett alapállapot [(i^*,j^*) vagy (j^*,i^*)],

vagy frusztráció a sokszereplős rendszerekben

logit szabály => Boltzmann-eloszlás => termodinamikai viselkedés

Tipikus kölcsönhatások a 3x3-as mátrixjátékoknál (folytatás II)

Egy antiszimmetrikus bázismátrix:

4) **Ciklikus dominancia**

Kő-papír-olló játék

$$A^{(cycl)} = \frac{1}{2}\left[e^{(2)} \otimes e^{(3)} - e^{(3)} \otimes e^{(2)}\right] \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok:

a mátrix antiszimmetrikus: $\mathbf{A}^{(cycl)} = -\mathbf{A}^{(cycl)T}$ (zérusösszegű játék)

A nyeremények összege nulla minden sorban és oszlopban

(emiatt ortogonális $\mathbf{A}^{(cycl)}$ mindhárom előző összetevőre

nem létezik potenciál, mert a KP → OP → OK → PK → PO → KO → KP váltások során

az aktív játékos mindig nyer.

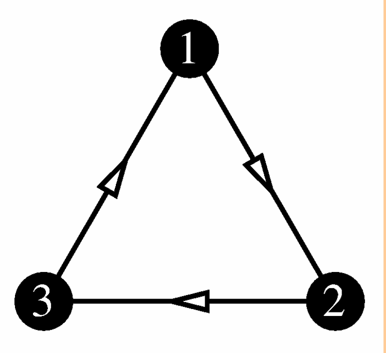
- kevert Nash egyensúly => sok stratégia együttlétezése (**biodiverzitás**)

ez a komponens megakadályozza a termodinamikai viselkedést

n=3-nál csak egy ilyen ciklikus komponens létezik

Ez a bázismátrix egy ciklikus irányított gráf szomszédsági mátrixa

-$\mathbf{A}^{(cycl)}$: a dominancia iránya ellentétes



Összesítve:

$$A = A^{(cr)} + A^{(self)} - A^{(av)} + A^{(coor)} + A^{(cycl)}$$

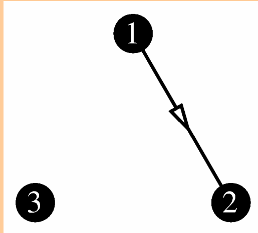
és nincs potenciál, ha $\mathbf{A}^{(cycl)} \neq 0$

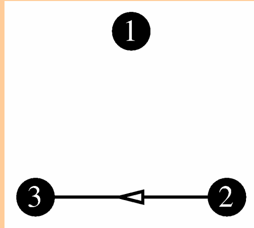
Szimmetrikus háromstratégiás mátrixjáték antiszimmetrikus összetevői

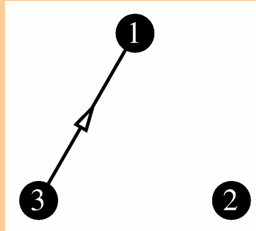
$$\frac{1}{2}\left[A-A^T\right]=\begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gráf reprezentációban:

merőleges bázismátrixok/gráfok

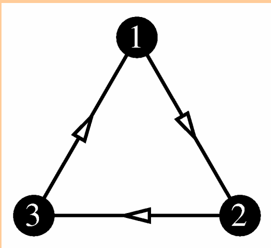


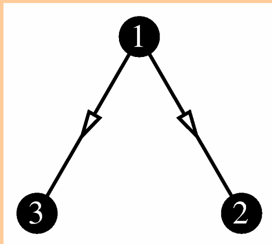


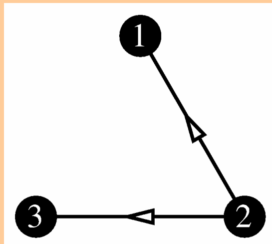


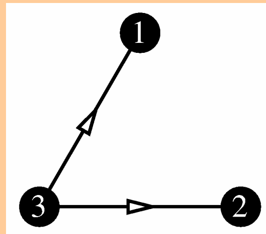
Az ön-és társfüggő, illetve a ciklikus komponensek együttes járuléka: ($h_1+h_2+h_3=0$)

$$\frac{1}{2}\left[A-A^T\right]=\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+h_1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+h_2\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}+h_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$









A 3 **hierarchikus összetevő** közül csak kettő független!

A hierachikus komponensek okozhatják a társadalmi dilemmákat.

Az első hierarchikus tag az (1,1) stratégiapár választását diktálja, mert

$$V^{(h1)}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Szimmetrikus *n*-stratégiás mátrixjáték elemi komponensei

Négyféle kölcsönhatás típus lineáris kombinációja:

$$A = A^{(cr)} + A^{(self)} - A^{(av)} + A^{(coor)} + A^{(cycl)}$$

ahol

$$A^{(cr)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad A^{(self)} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \cdots & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \cdots & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & \beta_n & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}, \quad A^{(av)} = a^{(av)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

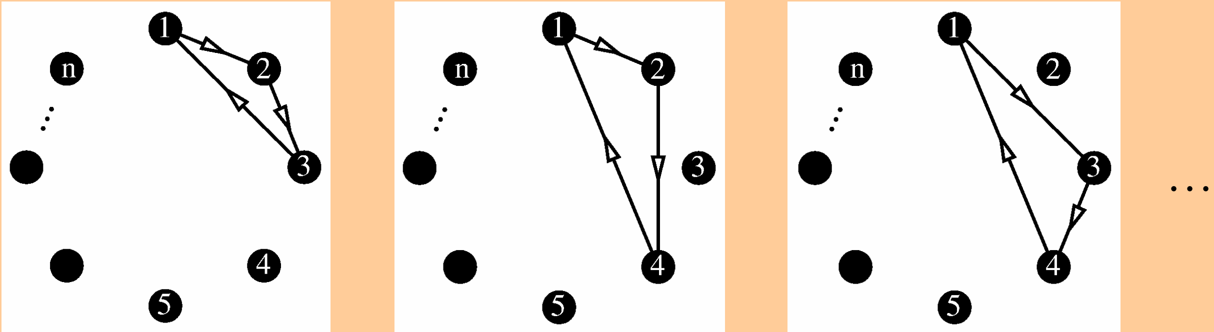
$$A^{(coor)} = \delta_{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \delta_{13} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \delta_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

Koordinációs kölcsönhatás létezhet *n*(*n*-1)/2 stratégiapár között.

Ezek az összetevők nem merőlegesek egymásra, de függetlenek, azaz lineáris kombinációik megadják az összes lehetséges koordinációs játékot.

Független ciklikus összetevők a szimmetrikus *n*-stratégiás mátrixjátékban

Gráf reprezentációban: az „1”-es és bármelyik $j>i>1$ stratégiahármas kő-papír-olló játéka

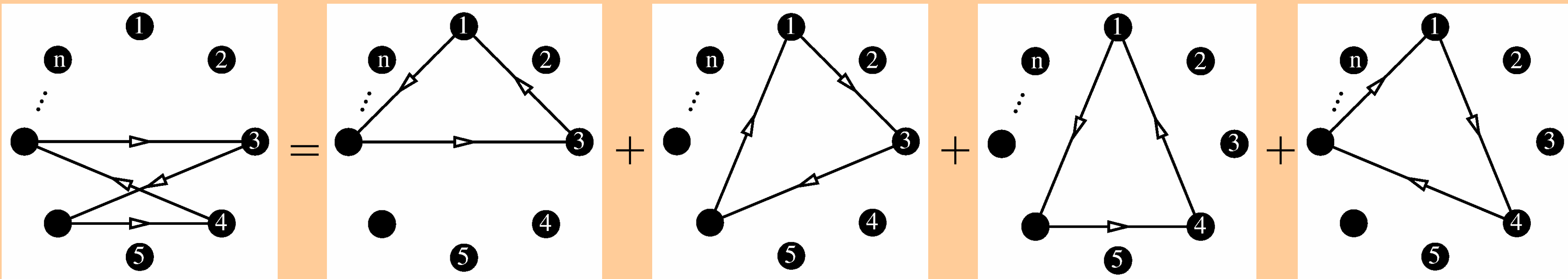


Ez a 3 gráf definiálja az n=4 eset ciklikus összetevőit

Összesen (n-1)(n-2)/2 ilyen háromstratégiás kő-papír-olló játék létezik.

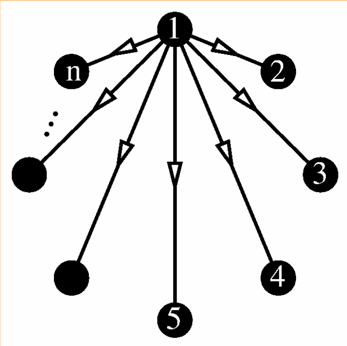
Ezek az összetevők nem merőlegesek egymásra, de függetlenek, azaz lineáris kombinációik megadják az össze lehetséges irányított hurkot. (Kirchhoff törvény)

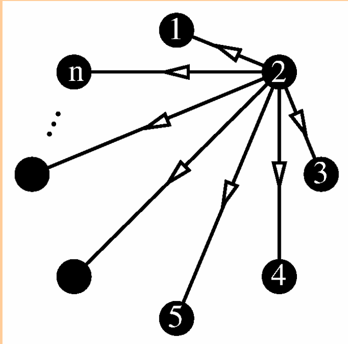
Például:

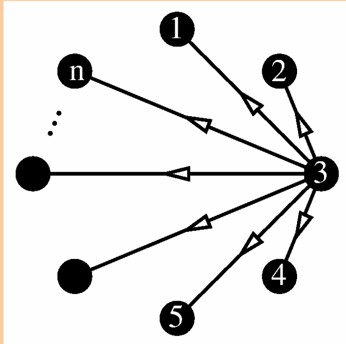


Független hierarchikus összetevők a szimmetrikus *n*-stratégiás mátrixjátékban

Gráf reprezentációban: az *i*-edik stratégia uralja az összes többit







, és így tovább

Nincs kivételezés: az uralkodó stratégia mindenki mástól azonos összeget vesz el.

n ilyen összetevő létezik, de ezek összege nulla, azaz, nem függetlenek egymástól.

Bármelyik (n-1) összetevő azonban kifeszíti a hierarchikus dominancia paraméter-alteret.

Mátrix reprezentációban az első összetevő:

$$A^{(h1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad V^{(h1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ez a tag az egyéni érdeken keresztül hajtja a játékosokat az (1,1) választására 0 nyereménnyel, még akkor is, ha a többi komponens alapján a játékosok másik stratégiapárt (i^*,j^*) választanának.

Ez a társadalmi dilemmák hajtóereje (a potenciáljátékokon belül)!

Kölcsönhatások összefonódása

A ciklikus komponenseknél láttuk, hogy bármilyen irányított hurok (vagy azok összege) összerakható olyan irányított háromszögekből, amelyeknek van egy közös csúcsa.

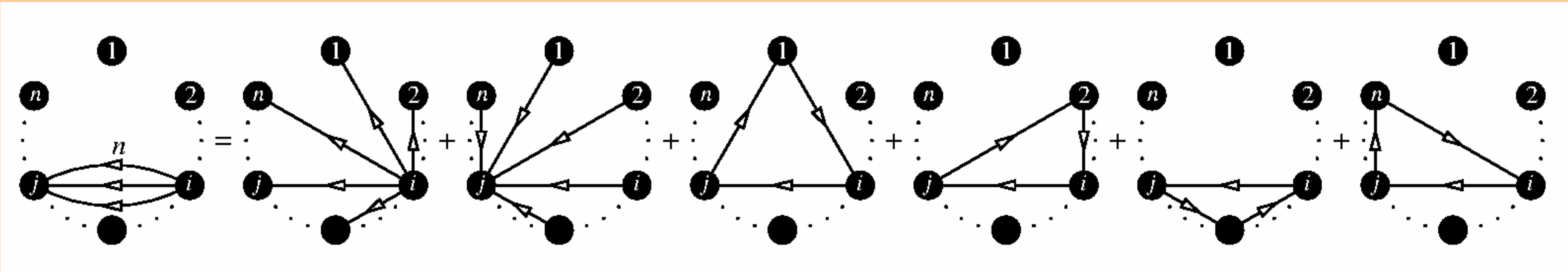
A közös csúcs lehet a gráf bármelyik pontja.

Következmény

- ha a rendszerben van egy kő-papír-olló komponens, akkor sok ilyen van $(n>3)$;
- ha viszont egy független bázisrendszer összes komponense hiányzik, akkor $\mathbf{A}^{(\mathrm{cycl})}=0$, stb.

Ha a nyereménymátrix egyetlen (nemdiagonális) komponensét változtatjuk, akkor változik a megfelelő antiszimmetrikus komponens is, ami maga után vonja 2 hiearchikus és sok ciklikus komponens változását.

Gráf reprezentációban:



A négyféle kölcsönhatás dimenziója *n* stratégiánál

1.) Játékok, amikor nyereményem csak a másiktól függ:

n bázismátrix, *n* paraméter

2.) Játékok, amikor nyereményem csak tőlem függ:

n bázismátrix, *n* paraméter, de egy dimenzió közös az előzővel

3.) Koordinációs kölcsönhatás

dimenzió: $n(n-1)/2$ (különböző stratégiapárok száma)

4.) Ciklikus dominancia

dimenzió: $(n-1)(n-2)/2$

ez a szám azonos a Kirchhoff törvényekből származtatható független és lényeges (nem triviálisan eltűnő) hurkok számával

$n=2$: nincs ciklikus dominancia (a szimmetrikus játékoknál)

$n=3$: a kő-papír-olló játék képviseli az egyetlen dimenziót

$n=4$: 3 független kő-papír-olló

A négyféle kölcsönhatás következménye térbeli rendszerekben *n* stratégiánál

Játékok, társfüggő nyereménnyel:

mindenki véletlenül választ stratégiát

Játékok, önfüggő nyereménnyel:

elég egy játékos magatartását kiszámítani, mert a többi ugyanúgy viselkedik

Koordinációs kölcsönhatás:

egy koordinációs vagy antikoordinációs pár: Ising modell semleges stratégiákkal sim

több koordinációs komponens: rendezett-rendezetlen átmenet

Potenciáljáték: (az előző három lineáris kombinációja)

mindig van legalább egy tiszta Nash egyensúly

létezik egy alapállapotnak megfelelő Nash egyensúly [max(V_{ij}) határozza meg]

rendezett-rendezetlen átmenet, ha a logit szabálynál nő a zaj

termodinamikai viselkedés

az antiszimmetrikus hierachikus összetevő társadalmi dilemmát eredményezhet

ez hiányzik a fizikai (részecskékből álló) rendszerekben

A négyféle kölcsönhatás következménye (folytatás)

Ciklikus dominancia:

megakadályozza a potenciál létezését és a termodinamikai viselkedést

általában kevert Nash-egyensúly => sokféleség megőrzése

biodiverzitás

önszervező mintázatok (élő rendszerek) sim

Újdonságok a fizikai rendszerekhez képest:

társadalmi dilemmák (a hierarchikus összetevők okozhatják)

élő rendszerekre jellemző önszerveződés és sokféleség megőrzése

Köszönöm a figyelmet